2025年東大理 2

(1)

$f(x)=x-1-\log x$ とすると　$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$f(x)$の増減は右の通りで、$x=1$ のとき極小。

$f(1)=0$ より、$x>0$ において$f(x)=x-1-\log x \geqq 0$

　$\therefore \log x \leqq x-1$　(証明終)

(2)

(1)より　$\log\left(\dfrac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) \leqq \dfrac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}-1=\dfrac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}$

また、$(\log x)'=\dfrac{1}{x}, (\log x)''=-\dfrac{1}{x^2}<0$ より、関数$\log x$は上に凸であるから

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) \geqq \frac{\log 1+\log x^{\frac{1}{n}}}{2}=\frac{\log x}{2n}$$

$$\frac{\log x}{2n} \leqq \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) \leqq \frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2} \quad \frac{\log x}{2} \leqq n\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) \leqq \frac{n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\int_1^2 \log x\,dx \leqq n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx \leqq \frac{n}{2}\int_1^2\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)dx$$

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \log x\,dx=\frac{1}{2}[x\log x-x]_1^2=\frac{1}{2}(2\log 2-2+1)=\log 2-\frac{1}{2}$$

$$\frac{n}{2}\int_1^2\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)dx=\frac{n}{2}\int_1^2(x)'\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)dx=\frac{n}{2}\left[x\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]_1^2-\frac{n}{2}\int_1^2 x\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)'dx$$

$$=n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)-\frac{n}{2}\int_1^2 x\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}dx=n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)-\frac{1}{2}\int_1^2 x^{\frac{1}{n}}dx$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}\left[\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1}\right]_1^2=(\log 2)\cdot\frac{e^{\frac{\log 2}{n}}-1}{\frac{\log 2}{n}}-\frac{2^{\frac{1}{n}+1}-1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$n\to\infty$のとき、$\dfrac{1}{n}\to 0$ であるから　$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\int_1^2\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)dx=(\log 2)\cdot 1-\frac{2-1}{2(1+0)}=\log 2-\frac{1}{2}$

はさみうちの原理により　$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx=\log 2-\frac{1}{2}$ ……(答)