2025年東大理$\boxed{5}$

(1)

A_1とA_2は、ともに3以上であるとする。
操作(T_1)によって、A_1とA_2は入れ替わるか、そのままである。
以降、左端の3以上の数字は、2回目の操作(T_1)が行われるまで、左端から動かない。
2回目の操作(T_1)が行われると、左端の3以上の数字は、左から2番目に移るか、左端から動かないか、いずれかである。
いずれにしても、一連の操作後、左から2番目までに少なくとも1個、3以上の数字が残る。
したがって、A_1とA_2のうち、少なくとも一方は2以下である。　(証明終)

(2)

題意を満たすn個の数字の並び$A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$のうち、$A_1$と$A_2$に着目して考える。

$i)$ $A_1 = 1, A_2 = 2$のとき
操作(T_1)によって、A_1とA_2は入れ替わらず、そのままである。
$A_3 \geqq 3$であるから、操作(T_2)によって、A_2とA_3は入れ替わらない。
以降、操作$(\mathrm{T}_3), \cdots, (\mathrm{T}_{n-1}), (\mathrm{T}_{n-1}), \cdots, (\mathrm{T}_3)$によって、3から$n$まで小さい順に並ぶような$n-2$個の数字の並び$A_3, \cdots, A_n$の個数は、$c_{n-2}$に等しい。2回目の操作$(\mathrm{T}_1)$が終わったとき、1から$n$まで小さい順に並んでいる。
このようなn個の数字の並びの個数は　$\therefore c_{n-2}$

$ii)$ $A_1 = 2, A_2 = 1$のとき
操作(T_1)によって、A_1とA_2は入れ替わる。
$A_3 \geqq 3$であるから、操作(T_2)によって、A_2とA_3は入れ替わらない。
i)と同様に考えて、この場合のn個の数字の並びの個数は　$\therefore c_{n-2}$

$iii)$ $A_1 = 1, A_2 \geqq 3$のとき
操作(T_1)によって、A_1とA_2は入れ替わらず、そのままである。
以降、操作$(\mathrm{T}_2), \cdots, (\mathrm{T}_{n-1}), (\mathrm{T}_{n-1}), \cdots, (\mathrm{T}_2)$によって、2から$n$まで小さい順に並ぶような$n-1$個の数字の並び$A_2, \cdots, A_n$の個数は、$A_2 = 2$のときを除いて、$c_{n-1} - c_{n-2}$に等しい。
2回目の操作(T_1)が終わったとき、1からnまで小さい順に並んでいる。
このようなn個の数字の並びの個数は　$\therefore c_{n-1} - c_{n-2}$

$iv)$ $A_1 = 2, A_2 \geqq 3$のとき
操作(T_1)によって、A_1とA_2は入れ替わらず、そのままである。
以降、操作$(\mathrm{T}_2), \cdots, (\mathrm{T}_{n-1}), (\mathrm{T}_{n-1}), \cdots, (\mathrm{T}_2)$によって、1および3から$n$まで小さい順に並ぶような$n-1$個の数字の並び$A_2, \cdots, A_n$の個数は、$A_2 = 1$のときを除いて、$c_{n-1} - c_{n-2}$に等しい。
2回目の操作(T_1)で2と1が入れ替わり、1からnまで小さい順に並んでいる。
このようなn個の数字の並びの個数は　$\therefore c_{n-1} - c_{n-2}$

$v)$ $A_1 \geqq 3, A_2 = 1$ のとき
操作(T_1)によって、A_1とA_2は入れ替わる。
以降、操作$(\mathrm{T}_2), \cdots, (\mathrm{T}_{\mathrm{n}-1}), (\mathrm{T}_{n-1}), \cdots, (\mathrm{T}_2)$によって、2 から$n$まで小さい順に並ぶような$n-1$ 個の数字の並び $A_2, \cdots, A_n$の個数は、$A_1 = 2$ のときを除いて、$c_{n-1} - c_{n-2}$に等しい。
2 回目の操作(T_1)が終わったとき、1 からnまで小さい順に並んでいる。
このようなn個の数字の並びの個数は　$\therefore c_{n-1} - c_{n-2}$

$vi)$ $A_1 \geqq 3, A_2 = 2$ のとき
操作(T_1)によって、A_1とA_2は入れ替わる。
以降、操作$(\mathrm{T}_2), \cdots, (\mathrm{T}_{\mathrm{n}-1}), (\mathrm{T}_{n-1}), \cdots, (\mathrm{T}_2)$によって、1 および 3 から$n$まで小さい順に並ぶような$n-1$ 個の数字の並び$A_2, \cdots, A_n$の個数は、$A_1 = 1$ のときを除いて、$c_{n-1} - c_{n-2}$に等しい。
2 回目の操作(T_1)が終わったとき、1 からnまで小さい順に並んでいる。
このようなn個の数字の並びの個数は　$\therefore c_{n-1} - c_{n-2}$

以上により、$i)$～$ii)$のときの個数はそれぞれc_{n-2}、$iii)$～$vi)$のときの個数はそれぞれ$c_{n-1} - c_{n-2}$であるから
$\therefore c_n = 2c_{n-2} + 4(c_{n-1} - c_{n-2}) = 4c_{n-1} - 2c_{n-2}$ …… (答)