2026年東大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

(1)

相違なる3点の選び方は${}_{15}C_3=\dfrac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2\cdot1}=455$通り。選んだ3点が一直線上に並ぶときを考える。

3点がy軸に平行に並ぶ場合　$3\times{}_5C_3=\dfrac{5\cdot4\cdot3}{2\cdot1}=30$通り　3点が$x$軸に平行に並ぶ場合　5通り

3点が傾き1の直線上に並ぶ場合　3点のy座標は$(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5)$の3通り。傾き-1も同数。

3点が傾き2の直線上に並ぶ場合　3点のy座標は$(1,3,5)$の1通り。傾き-2も同数。

選んだ3点が一直線上に並ぶのは　$30+5+2\times(3+1)=43$通り。

余事象により　$p_5=1-\dfrac{43}{455}=\dfrac{412}{455}$ ……(答)

(2)

相違なる3点の選び方は${}_{6m}C_3=\dfrac{6m(6m-1)(6m-2)}{3\cdot2\cdot1}=2m(6m-1)(3m-1)$通り。

選んだ3点が一直線上に並ぶときを考える。

3点がy軸に平行に並ぶ場合　$3\times{}_{2m}C_3=\dfrac{2m(2m-1)(2m-2)}{2\cdot1}=2m(2m-1)(m-1)$通り

3点がx軸に平行に並ぶ場合　$2m$通り

3点が傾き1の直線上に並ぶ場合　3点のy座標は$(1,2,3),(2,3,4),\cdots,(2m-2,2m-1,2m)$の$2m-2$通り。

傾き-1も同数。

3点が傾き2の直線上に並ぶ場合　3点のy座標は$(1,3,5),\cdots,(2m-4,2m-2,2m)$の$2m-4$通り。

傾き-2も同数。

⋮

3点が傾き$m-2$の直線上に並ぶ場合　3点のy座標は$(1,m-1,2m-3),\cdots,(4,m+2,2m)$の4通り。

傾き$-m+2$も同数。

3点が傾き$m-1$の直線上に並ぶ場合　3点のy座標は$(1,m,2m-1),(2,m+1,2m)$の2通り。

傾き$-m+1$も同数。

選んだ3点が一直線上に並ぶ選び方の総数は

$$\begin{aligned}&2m(2m-1)(m-1)+2m+4\{1+2+\cdots+(m-2)+(m-1)\}\\&=2m(2m-1)(m-1)+2m+2m(m-1)=2m(2m^2-3m+1+1+m-1)\\&=2m(2m^2-2m+1)\end{aligned}$$

余事象により

$$p_{2m}=1-\frac{2m(2m^2-2m+1)}{2m(6m-1)(3m-1)}=\frac{(6m-1)(3m-1)-(2m^2-2m+1)}{(6m-1)(3m-1)}=\frac{16m^2-7m}{(6m-1)(3m-1)}$$

$$=\frac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}\ \cdots\cdots(\text{答})$$