

掃き出し法で連立一次方程式を解く

最初の例

連立一次方程式

$$\begin{aligned} & \cdot x + 3y + 4z = -7 \\ & \cdot 2x + 5y - z = 12 \\ & \cdot 5x - 2y + z = 5 \end{aligned}$$

を掃き出し法で解く。

以下で、最初の 3 行は、上の方程式の係数と定数項を書き抜いたもの。そのあとは、右に書いた操作をしてゆく。一度使った式も、そのまま残しておく。

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 3 & 4 & -7 & \\ 2 & 5 & -1 & 12 & \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ 倍して引く} \\ 5 \text{ 倍して引く} \end{array} \\ 5 & -2 & 1 & 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 3 & 4 & -7 & \\ 0 & -1 & -9 & 26 & \times (-1) \\ 0 & -17 & -19 & 40 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 3 & 4 & -7 & \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \text{ 倍して引く} \\ 17 \text{ 倍して足す} \end{array} \\ 0 & 1 & 9 & -26 & \\ 0 & -17 & -19 & 40 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & -23 & 71 & \\ 0 & 1 & 9 & -26 & \\ 0 & 0 & 134 & -402 & \div 134 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & -23 & 71 & \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right\} \begin{array}{l} 23 \text{ 倍して足す} \\ 9 \text{ 倍して引く} \end{array} \\ 0 & 1 & 9 & -26 & \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \end{array}$$

最後の 3 行を、連立方程式に戻せば

$$\begin{aligned} & \cdot 1x + 0y + 0z = 2 \\ & \cdot 0x + 1y + 0z = 1 \\ & \cdot 0x + 0y + 1z = -3 \end{aligned}$$

となり、 $x = 2$, $y = 1$, $z = -3$ と解けたことになる。

次の例

上では、「ある行を k 倍する(または k で割る)(ただし $k \neq 0$)」、「ある行を k 倍してほかの行に足す(または引く)」の二つの操作だけを用いた。

次では、「ある行とほかの行を交換する」も用いる。(クイズ:実はこの操作は上の二つの組み合わせで書ける。考えてみよ。)

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 8 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \text{いれかえ} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{引く} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{引く} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -2 \text{ で割る} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \text{引く} \\ \text{引く} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

「解けない」例

次は、中学・高校の範囲では「解けない」とされるものである。答えが一つに決まらないのである。

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 & 14 \\ -2 & -3 & 0 & -23 \\ 3 & 8 & -7 & 52 \end{array}$$

解こうとすると次のようになり、その先はどうにもならない。

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

実は、これで解けているのである。連立方程式に戻してみよう。

- ・ $1x + 0y + 3z = 4$
- ・ $0x + 1y - 2z = 5$
- ・ $0x + 0y + 0z = 0$

第 3 式はないも同然である。第 1 式、第 2 式で、 z は両方に現れているのに対し、 x, y は片方にしか現れない。

そこで、 $z = c$ (定数) とおく。この数は好きに決める。すると第 1 式は $x + 3c = 4$ となるから $x = -3c + 4$ 。第 2 式は $y - 2c = 5$ となるから $y = 2c + 5$ 。まとめると

- ・ $x = -3c + 4$
- ・ $y = 2c + 5$
- ・ $z = c$

この三つを、元の三本の方程式に代入してみよう。

- ・ $x + 2y - z = (-3c + 4) + 2(2c + 5) - c = 14$
- ・ $-2x - 3y = -2(-3c + 4) - 3(2c + 5) = -23$
- ・ $3x + 8y - 7z = 3(-3c + 4) + 8(2c + 5) - 7c = 52$

と c は消える。つまり、 c の値がいくつであっても、元の連立方程式は成り立つ。

「解けない」例をもう一つ

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 2 & 14 \\ 1 & 5 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 3 & 25 \end{array}$$

これは次のようになる。

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- ・ $1x + 5y + 0z = 8$
- ・ $0x + 0y + 1z = 3$
- ・ $0x + 0y + 0z = 0$

第 2 式から $z = 3$ である。 $y = c$ とおく。すると $x = -5c + 8$ となる。これで解けていることを確かめよ。