掃き出し法で連立一次方程式を解く

最初の例

連立一次方程式

- x + 3y + 4z = −7
- 2x + 5y − z = 12
- 5x − 2y + z = 5

を掃き出し法で解く。

以下で、最初の 3 行は、上の方程式の係数と定数項を書き抜いたもの。そのあとは、右に書いた操作をしてゆく。一度使った式も、そのまま残しておく。

1	3	4	−7	
2	5	−1	12	2 倍して引く
5	−2	1	5	5 倍して引く

1	3	4	−7	
0	−1	−9	26	× (−1)
0	−17	−19	40	

1	3	4	−7	3 倍して引く
0	1	9	−26	
0	−17	−19	40	17 倍して足す

1	0	−23	71	
0	1	9	−26	
0	0	134	−402	÷ 134

1	0	−23	71	23 倍して足す
0	1	9	−26	9 倍して引く
0	0	1	−3	

1	0	0	2
0	1	0	1
0	0	1	−3

最後の 3 行を、連立方程式に戻せば

- 1x + 0y + 0z = 2
- 0x + 1y + 0z = 1
- 0x + 0y + 1z = −3

となり、x = 2, y = 1, z = −3 と解けたことになる。

次の例

上では、「ある行をｋ倍する（またはｋで割る）（ただしｋ ≠ 0）」、「ある行をｋ倍してほかの行に足す（または引く）」の二つの操作だけを用いた。

次では、「ある行とほかの行を交換する」も用いる。（クイズ：実はこの操作は上の二つの組み合わせで書ける。考えてみよ。）

0	1	1	4	いれかえ
1	0	1	6	
1	1	0	8	

1	0	1	6	
0	1	1	4	
1	1	0	8	引く

1	0	1	6	
0	1	1	4	
0	1	-1	2	引く

1	0	1	6	
0	1	1	4	
0	0	-2	-2	−2で割る

1	0	1	6	引く
0	1	1	4	引く
0	0	1	1	

1	0	0	5
0	1	0	3
0	0	1	1

「解けない」例

次は、中学・高校の範囲では「解けない」とされるものである。答えが一つに決まらないのである。

1	2	-1	14
-2	-3	0	-23
3	8	-7	52

解こうとすると次のようになり、その先はどうにもならない。

1	0	3	4
0	1	-2	5
0	0	0	0

実は、これで解けているのである。連立方程式に戻してみよう。

- $1x + 0y + 3z = 4$
- $0x + 1y - 2z = 5$
- $0x + 0y + 0z = 0$

第 3 式はないも同然である。第 1 式、第 2 式で、z は両方に現れているのに対し、x, y は片方にしか現れない。

そこで、z = c (定数) とおく。この数は好きに決める。すると第 1 式は $x + 3c = 4$ となるから $x = -3c + 4$。第 2 式は $y - 2c = 5$ となるから $y = 2c + 5$。まとめると

- $x = -3c + 4$
- $y = 2c + 5$
- $z = c$

この三つを、元の三本の方程式に代入してみよう。

- $x + 2y - z = (-3c + 4) + 2(2c + 5) - c = 14$
- $-2x - 3y = -2(-3c + 4) - 3(2c + 5) = -23$
- $3x + 8y -7z = 3(-3c + 4) + 8(2c + 5) - 7c = 52$

と c は消える。つまり、c の値がいくつであっても、元の連立方程式は成り立つ。

「解けない」例をもう一つ

1	5	2	14
1	5	1	11
2	10	3	25

これは次のようになる。

1	5	0	8
0	0	1	3
0	0	0	0

- $1x + 5y + 0z = 8$
- $0x + 0y + 1z = 3$
- $0x + 0y + 0z = 0$

第 2 式から $z = 3$ である。$y = c$ とおく。すると $x = -5c + 8$ となる。これで解けていることを確かめよ。

岩瀬順一