

目次

Contents

	序文	i
第1章	序論	1
1.1	はじめに	1
1.2	流体力学の歴史	2
	コーヒーブレイク	6
第2章	基礎知識	9
2.1	微分の復習	9
	コーヒーブレイク	12
2.2	微分と差分	13
2.3	微分方程式	17
2.4	簡単な物理現象の微分方程式	22
2.5	微分方程式の厳密解	24
	コーヒーブレイク	28
第3章	差分法入門	31
3.1	一次元非定常熱伝導	31
3.2	陽解法の安定性	35
3.3	二次元非定常熱伝導	38
3.4	適合性	41
3.5	一次元定常熱伝導	42
	コーヒーブレイク	48

3.6	二次元定常熱伝導	49
3.7	陰解法	52
第 4 章	非圧縮粘性流れの支配方程式	55
4.1	はじめに	55
4.2	ベクトルとテンソル	56
4.3	支配方程式	58
	コーヒーブレイク	62
第 5 章	非圧縮粘性流れの解析	65
5.1	はじめに	65
5.2	陽解法による離散化	66
	コーヒーブレイク	72
5.3	陰解法による離散化	73
5.4	輸送方程式の安定性	74
	コーヒーブレイク	78
付録 A	プログラムリスト	81

1

序 論

Introduction

はじめに 1.1

人間の生活は、太古から食料と移住空間を得るために費やされてきました。そして、人々は自然災害から身を守るため、昔から知恵を働かせてきたのです。その多くは、台風、洪水といった空気や水の流れであり、これらの災害による被害を少なくしたり、あるいは飲料水を効率よく集めたりするために気体や液体の流れの研究が必要となっていたのです。流れの研究は多くの研究者によって行われ、ベルヌーイによって流体力学と命名されました。この後、流体力学は理論と実験の両面から研究が続けられ、輝かしい成果を上げていきます。しかしながら、フランスの土木技術者ルイ・マリー・アンリ・ナビエとイギリスの数学者ジョージ・ガブリエル・ストークスによって導かれた粘性流体の運動を表す方程式は研究者に多くの悩みを与え、それは現在まで続いているのです。

流体力学の研究は最近まで理論と実験の両面から行われてきました。実験的研究からは多くのすばらしい成果が得られていますが、理論的な方法は実用に役に立つレベルには

達していません。この大きな理由は、ナビエ・ストークス方程式の非線形性によるものです。このためナビエ・ストークス方程式を理論的に解析することは絶望的であり、他の方法を見いだすしかなかったのです。その方法として注目されたものがこの方程式を数值的に解く数値解析です。

流体力学の基礎方程式をコンピュータにより数值的に解く、いわゆる数値流体力学の概念はイギリスの気象学者リチャードソンによってはじめて提唱され、アメリカのロス・アラモス研究所のノイマンにより具体化されました。当時は、コンピュータの性能などの制限によりその応用は非常に限られた分野だけでしたが、1960年代の中頃にはフロムらによって物体後流に生じるカルマン渦列が計算機によって再現されたのです。その後、1980年代より計算機は飛躍的な進歩を遂げ、簡単なものに限られますが、現実的な流れが解析されるようになってきました。

本書は、近年益々発展してきている数値流体力学を学ぶための入門書です。本書が対象としている方は大学入試の際に公式を丸覚えしてその意味を考えたこともない方、また一般的な大学生、すなわち大学でほとんど学んでいない、あるいは大学に入ってから頭が悪くなった方、企業に入ってからわづかしな経験がないのに大学で習ったことを何も覚えていない方です。したがって、余力のある読者はさらにステップアップされることを希望します。

流体力学の歴史 1.2

前節では少し堅い話になったので、ここでは流れの研究の歴史をざっと説明することになります。前節でも述べましたが、紀元前のエジプトやローマでは、天気予報と飲料水の確保が最も重要な課題でした。しかし、天気予報を直接行うことはできなかったため、代わりに暦が発明されたのでした。エジプトの人々にとっては、洪水を予測することが生活の上で生死を決するくらい大切な事項でしたが、雨も降らないのに洪水が起こっていたので、暦の発明は、長期の天気予報がなされたものと同じことだったのです。

天気予報が代表的な例ですが、流れを研究することは人間が生きていく上で不可欠でした。しかし、さらに細かくいうと流れがどれだけの力を物体に与えるかということが重要であったのです。たとえば、古代では輸送手段は帆船を用いていましたが、強い風が吹くとマストが折れてしまうという問題などは非常に重要であったのです（これは流体力学と材料力学の問題です）。また、遠くの水源から飲料水を勢いよく導いてくることも重要で

した。つまり、流れの問題の最も重要なポイントとなっていたのは、流体抵抗の大きさがどれくらいであるか、ということであったのです。この流体抵抗の理論的な研究を最初に行ったのがアリストテレス（B.C. 384 » 322）であったといわれています。彼の理論は推進力の理論と呼ばれるもので、物体が運動するためには絶えず進行方向に力が働いているというものです。詳しくいうと、石を投げたとき手を離れた石が飛び続けるためには、石の周りの空気が常に石を押し続けていなければならない、というものです（慣性の法則を知らなかった人にとっては当然のことといえます）。今から考えれば、ばかばかしい理論ですが、この問題の解決はニュートン（1642 » 1727）が登場するまで待たなければならなかったのです。アリストテレスはまた、物体の落下について、重いものは軽いものより速く落下する、という考えも示し、これも解決にはガリレオまで待たねばなりませんでした（何故これがおかしいのか考えてみましょう）。

ギリシャ時代には、上記の例のように物の成り立ちや自然現象の仕組みを考えることが盛んに行われていました。このようなことは「哲学」と呼ばれました。この考えは今でも欧州では強く残っており、欧州の古い大学では日本のように理系や文系で分けるのではなく、哲学部の中に文学や理学の学科があり、現在でも博士号は全ての学問で「哲学博士」になっています（昔は論文の言語までギリシャ時代を模倣しラテン語で書かれていました）。この時代には有名な学者が傑出しましたが、その中の有名な話の一つが、アルキメデスの王冠の贋作鑑定でしょう。よく知られた話ですが、当時の王様の王冠が、金だけではなく金と銀を混ぜて安上がりにしたのではないかという疑惑が持ち上がり、アルキメデスにその判断をするように指令が下ったのでした。この難問に対し、アルキメデスは物質の密度が皆異なっていることに気がついたのです。すなわち、同じ重さだけ金と銀を用意すると、その体積が異なることに気がついたのです。この体積の差を比べるのに、容器からあふれ出た水を利用したのでした。この原理で、王冠と同じ重さの金を用意し、その体積が王冠と異なっていたことから王冠が純金ではないことを見破ったのでした。このことから、浮力の原理をアルキメデスの原理と呼ぶのです。

時代は進み、ルネッサンスの時代に科学は偉大な天才を迎えました。ガリレオ・ガリレイです。ガリレオは多くの業績を残していますが、皆さんが覚えているものはおそらく天動説と地動説の話で、「それでも地球は動いている」の言葉でしょう。ガリレオの業績の中で流体力学に欠かせないものが、大気圧の発見です。残念ながら、この証明はガリレオの弟子のトリチェリが行いましたが、大気圧の存在の示唆は疑いなくガリレオ自身の考えによるものです。ガリレオの没年に誕生したのが偉大な天才、ニュートンでした。

ニュートンは流体抵抗が、速度に無関係な一定値、速度に比例するもの、速度の自乗に比例するもの、の三種類に分けられ、このうち速度の自乗に比例するものが重要であり、これ

は流体の密度にも比例するという理論を出したのです（ニュートンの偉さを再度確認しましょう）。これは今日、ニュートンの抵抗法則として知られています。ニュートンに引き続いて、流れの研究を行ったのがベルヌーイ親子です（お父さんはヨハン（1667» 1748）、子供はダニエル（1700» 1782）といいます）。とくにダニエルはみなさんがよく知っている？ベルヌーイの定理の創始者であるばかりでなく、流体力学（Hydrodynamics）の名を与えたことで知られています。流体抵抗は彼らによって、一つの進歩を得ましたが、これをさらに高度な理論で裏付けようとしたのがダランベール（1717» 1783）です。しかしながらダランベールの理論が導き出したものは、流体は物体に抵抗を及ぼさない、という非現実的なものだったのです。これはダランベールのパラドックスと呼ばれるもので、その後オイラーやラグランジュ、その他多くの研究者によって取り組まれましたが、解決することができなかったのです^{Y1}。この問題の完全な解決はプラントル（1875» 1953）の登場まで待たなければならなかったのです。このプラントルの理論によって流体抵抗の問題が解決を見たのは今世紀初頭であり、まだそれから一世紀もたっていないことを考えると流体力学は完成されたものとはいえません。というのも、残念ながらプラントルの理論をもってしても任意の物体の抵抗を計算することはできないからなのです。そのため今日でも、飛行機やジェットエンジン等、多くの工業で用いられている機械の設計は、実験によって試行錯誤しながら作られているのです（あのスペースシャトルでさえほとんど実験だけによって設計されたのです）。そしてこの問題を解決できそうなものが数値流体力学なのです。したがって、数値流体力学はいまのところ無限の可能性を秘めているといっても過言ではありません。これからの時代を生きるみなさんは、ぜひマスターすることをお勧めするとともに、古きを訪ねることも忘れないようにということもいっておきます。なぜなら、流れを数値解析した結果を判断するのは人間であり、流れの結果が正しいかどうかを判断するには正確な流れの知識が必要だからです。さらに、コンピュータは人間の命令で動くものであり、間違った命令を出すとそれを疑わずに実行してしまう機械だということをよく理解して下さい。そして一日も早く、みなさんが物体後方にできるあの有名なカルマンの渦列を計算できることを願ってやみません。

数値流体力学を本格的にマスターするには、数学、流体力学、プログラミングの本質的な知識が必要となります。本シリーズは、数値流体力学を効率よく修得するために、初級、中級、上級の3コースに分かれています。各コースにはそれぞれ特色があります。本書は初級編であり、この利用方法は人それぞれですが、時間の無駄を避けるために標準的

^{Y1} 唯一、キルヒホッフの死水理論だけが成果を上げたといえるのですが、これも完全なものではありませんでした。

な勉強の方法を述べておきます。大学入試センター試験の数学、物理を今でもすらすら解ける方は本書を読まずに市販の数値流体力学の本を読まれた方が早く修得できます。解けない方は本書を読み直す方が良いでしょう。ただし、仮分数、帯分数の計算ができない方や、二次方程式の解の公式が言えない方は中央出版の中学数学を復習した後、本書を読んで下さい。そして、本格的に修得したい方には是非、自分専用のコンピュータを持たれることを薦めます。

物体の落下について、ガリレオの思考実験を紹介しておきます。ガリレオは、アリストテレスの落下の法則が正しいとして、頭の中で理論的な実験を行ってみました。いま、重いものと軽いものを紐で結んで落下させることを考えます。重いものは軽いものより速く落下しようとするはずですから、紐はピンと張った状態になると思われます。軽いものは重いものより遅く落下するわけですから、重いものの落下に関しては抵抗になり、その結果、重いものだけを落とすときよりゆっくりと落ちると考えられます。ところが、この紐を楊枝のような細くて軽い棒で繋いでいたと考えると、両者は一体となって落ちると考えられます（棒は丈夫で折れないとします）。そうすると、一つの時より重さが重いわけですから、速く落ちなければならなくなります。これは矛盾した結果となります。このことからガリレオは、アリストテレスの考えがおかしいと判断したのでした。

大学入試を終えて数年が経ち、受験勉強で行ったことは大学の楽園生活ですっかり忘れ去られていることでしょう。また、本書を読まれている方は、高校時代の数学や物理、大学での講義を理解されていない方が多いと思います（十分理解していれば最高学府に行かれていることでしょうし、どこの大学でさえも合格者の得点率は6割程度です）。すなわち、ほとんどの大学生の皆さんはこれまで習ってきた数学や物理を完全に理解しているわけではなく、あまり理解できていないのが現実ではないのでしょうか。

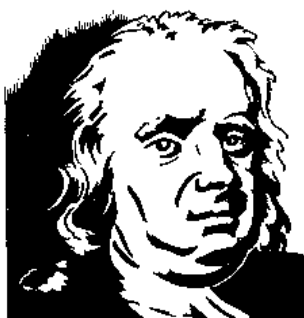
このような現実を分析してみると、理解できていない人の勉強の方法にある特長が見られます。その大きなものが正確に読んでいないということです。教科書は日本語で書いてありますから、語句の意味が分かっていなくても読むことはできますので、「読めた」ということと「理解した」ということが混同されているようです。もし、英語の本を読む場合は、分からない単語が出てくれば辞書を引いて調べるはずですが、ところが、日本語の教科書になると面倒なのか、分からない語句が出てきても調べようとしない人が多く、結局それがたまってきて、試験前に中身はよく分からないまま丸暗記という具合になっていきます。これから勉強するにあたり、面倒がらず分からない言葉にはしるしを付けて自分がどこまで理解しているのかを把握することから始めて下さい。そして、分からないことがあっても、すぐに人に聞いたり参考書を開くのではなく、10分間だけ考えてみて下さい。それでも分からないときは調べてみて、自分の考えのどこが間違っていたかや考えが足り

なかったことを素直に記録するようにして下さい。

F コーヒーブレイク

¶ アイザック・ニュートン (Isaac Newton, 1643 » 1727)

3



リンゴが木から落ちるのを見て、万有引力の法則を見つけ、その後の物理学に大きく貢献したあのニュートンです。残念なことにこのエピソードはどうやら事実ではなかったようですが、彼の名前は科学の至る処で見ることが出来ます。

「私は、自分が世間の眼にどう映ってるかは知らない。けれども自分自身としては、海辺に遊んでいて、時折普通よりも滑らかな石や美しい貝を見つけて楽しんでる子供に過ぎないのではないかと思われる。しかも真理の大洋はまるで未知のままに私の眼前に横たわっている。」これが、その生涯の終わりに当たって、アイザック・ニュートンが下した自分自身への評価でした。しかし、彼の業績を評価する後継者たちは、ほとんど例外なく、ニュートンは人類最高の知者―「その天才において人類を超越したもの」―と言っています。ニュートンは、ガリレイ (Galileo Galilei) が没した年のクリスマスの日にイギリスのウールズソープの農家に生まれ、機械いじりの好きな目立たない少年でした。母方の叔父の勧めでケンブリッジ大学、トリニティーカレッジに通いました。1665年、彼が22歳のとき、ロンドンのペスト大流行で一時帰郷し、その1年半の間にニュートンの主要な発見のうちの4つ、(1) 2項定理、(2) 微積分法、(3) 重力の法則、(4) 色の性質 (光の分析) が発見されています。その後ケンブリッジに帰り教授に就任、光学研究 (「光と色の新理論」、ニュートンリングの発見、反射望遠鏡の製作など)、数学研究 (微積分法の発見など)、力学・天文学研究

(「プリンキピア」を著し、力学の原理・万有引力の法則などを体系化しました。原文は前に書いたようにラテン語で書かれています) の分野で巨大な業績を積み重ねてきました。晩年は錬金術や神学の研究も行い、国会議員や王立協会の会長などもつとめています。また、彼は妻をめとらず、生涯独身を通したそうです。

ニュートンに関してはお固いイメージがしますが、ニュートンが亡くなる最後の2, 3年のほとんど絶え間ない苦痛に対する勇気と忍耐には、人間の王者としての彼にもう一つの人間的栄誉を加えるものでありました。彼はひるまずに結石の苦痛に耐え、油汗が体から玉のように流れ出ているのに、いつも看護の人々に同情の言葉を忘れなかったそうなのです。最後にひっきりなしの咳のためにひどく衰弱し、1727年3月20日の朝1時から3時の間、眠ったまま亡くなりました。享年85歳でした。

μ

¶ ダニエル・ベルヌーイ (Daniel Bernoulli, 1700 » 1782)

3

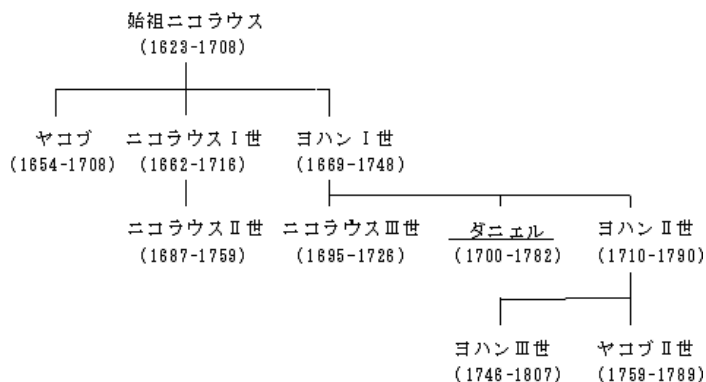


ベルヌーイ (Bernoulli) という名前は、数学・流体力学などで度々登場しますが、これらの全てが同じ人を表しているわけではありません。しかし彼らは同じ一族の人々です。歴史上最も多く科学者を輩出した家系として有名で遺伝学の研究対象となっているくらいです。この一族の人々は、総じて数学において優れた才能を持ち合わせていますが、流体力学で有名なダニエルの父親ヨハン (Jean, 1667» 1748) と、叔父におたるヤコブ (Jacques, 1654» 1705) は互いに競い合い、時には喧嘩もしつつ研究を続け、数学についての数々の功績を残しております (ベルヌーイの不等式等 ☺☺☺)。

さて、ダニエルは始め医学を志し医者になりましたが運命には逆らえず、まるであたかも飲んだくれが、アルコールに戻っていくように数学者になっていきました。ダニエルとあの偉大なオイラーは親友であり、仲の良い競争相手であったそうです。

また、ダニエルの父ヨハンはちょっとひどい人で、ダニエルの "Hydrodynamica" という本の内容を自分の "Hydraulica" という本に盗用していたのです。ダニエルは親友のオイラーにとってもやりきれない思いを手紙にして伝えています。

ダニエル・ベルヌーイの研究は微積分学，微分方程式論，確率論，振動弦の理論，気体運動論，流体力学といった多くの応用数学の問題について行われ，流体力学に関していえば，あの有名な，"ベルヌーイの法則" を発表しています。このような多才な D. ベルヌーイのことを称して今日，数理物理学の創始者と呼んでいる事も，うなずけると思います。



2

基礎知識

Basic knowledge

微分の復習 | 2.1

流れの数値計算法には現在、(有限) 差分法 (Finite Difference Method, FDM), 有限体積法 (Finite Volume Method, FVM), 有限要素法 (Finite Element Method, FEM), 境界要素法 (Boundary Element Method, BEM) などがありますが、この中で最も良く使用されるのが差分法です。これは差分法の歴史が長いからです。差分法は微分演算子を直接離散化するため理解しやすく、プログラムが作りやすいといった利点を持っていますが、まともな答えを出すには少しばかり理論を学ぶ必要があります。といっても、難しいことはありません！高校の数学より少し高級なことをすれば良いのです。ここでは、遠い昔に習ったものや、代返して聞いていなかった数学について少し復習をしておきます（これから勉強するにあたって数学の本、線形代数の本を用意しておいたほうがいいでしょう。難しいものはいりません。できるだけ簡単なものを用意しておく方がいいでしょう）。数学、物理に自信がある人はこの章を飛ばしてもかまいません。なお、本格的に勉

強するには、ぜひ専門の本を買うようにして下さい。

さて、いまある区間 $a \ll b$ を考えます（数学屋さんは $[a; b]$ と書きます）。このとき

$$a \cdot x \cdot b \quad (2.1)$$

を満足する x があり、この範囲内を自由に動けると、 x をこの区間における変数といいます。また、この x の各々の数値に対し、ある対応をする数 y があるとき、 y を関数といいます。そしてこの関係をつぎのように書きます。

$$y = f(x) \quad (2.2)$$

y の値は x の値によって変化するので、 x を独立変数、 y を従属変数と呼びます（その昔習った記憶があると思います）。いま x が a に近づくとき $f(x)$ が $f(a)$ に近づくならば $f(x)$ が a において連続であるといいます。区間 $a \ll b$ のあらゆる点でこの関係が成り立つならば、この区間で連続であるといいます（高校のときに左右から極限をとって連続とか不連続とかを勉強した記憶があると思います。ない人はこの本を読むには早すぎます）。

問題 2.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を証明せよ。 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ を利用せよ。

問題 2.2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ を求めよ。

さて、独立変数は一つに限らないのでたとえば

$$z = f(x; y) \quad (2.3)$$

という関数も考えられます。この場合、独立変数が一つではないので多変数関数と呼ばれます。いま、このような連続な関数 $f(x)$ に対し x が a から b まで変化するとき

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2.4)$$

を平均変化率といいます。上式において $b = a + h$ とおくと

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (2.5)$$

b が a に限りなく近づいたときの値は a 点での接線の傾きとなります。これを微分係数といい次の式で定義します。

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (2.6)$$

a は x のある位置（任意の位置）であるから (2.6) 式を一般的にするために a を x に置き換えると

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.7)$$

いま、 x の増えた分を Δx 、それに対する増加分 $f(x + \Delta x) - f(x)$ を Δy とおくと

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2.8)$$

となります。上式の $f'(x)$ を dy/dx と表すと、これは x の関数であるので導関数と呼びます（微分係数とも呼ばれます）。また、この場合のように独立変数が x だけ（一つだけ）のとき常微分といいます。

さて、微分とはいったい何を表しているのでしょうか？ 高校の数学では微分とはある関数の接線の傾きを表していると習ったと思います。ある関数の微分とは、瞬間の変化率ということです。このことを具体的に説明してみます。今ある関数というのを自動車の速度だとします。自動車の速度は信号で止まったり加速したりしていますので時間と位置の関数であるといえます。

いま神戸から岡山まで自動車を運転したとします。不幸にも姫路でネズミ取りに捕まったとします。このとき警察官に対して「時速というのは1時間に何 km 走ったかで表すものだ。私はこの1時間に 70 km しか走っていないから違反はしていない。」という人はいないでしょう。すなわち、言い訳した速度は速度の平均変化率であるのに対し、違反した速度は瞬間の速度だからです。これは容易に理解できることだと思います。

しかしながら、この瞬間の速度だけからでは自動車の状態は判断できません。というのは、捕まったときに「しまった！」と思う人と「良かったー！」と思う人がいるからです。すなわち、もう少し前だったら違反じゃなかったのに！と思う人ともう少し前だったら免停だった！という人に分かれるからです。すなわち、加速中なのか減速中なのかは瞬間の速度だけでは分からないからです。したがって自動車の状態を明らかにするには瞬間の速度の変化率が必要となるのです。瞬間の速度の変化率、すなわち速度の微分というのは運動の状態を示す重要なパラメータなのです。

1 時間に 70 km しか進んでいないという表現は誰でも分かると思います。そして、この距離を走行する間には必ず 70 km/h という速度を出しているはずだ、ということも容易に理解できると思います。なぜならすべて 70 km/h 未満で走っていたなら行き先に到達しないし、それ以上だし続けていれば目的地を通り過ぎてしまいます。加速、減速を繰り返して目的地に行くわけですが、その間には必ず 70 km/h があるということは当然で

しょう（平均が 70 km/h であれば良いわけですから）。そしてこのことを平均値の定理といいます（簡単なことなのです）。

問題 2.3 $f(x) = x^2$ のとき上で示した導関数の定義に従って、導関数を求めよ。

F コーヒーブレイク

3

昔は x の関数と言葉で書いていましたが、これを $f(x)$ という表現にしたのがラグランジュです。また導関数という名前を与えたのはフランスのコーシーです。そして現在用いられている時間の微分に x という表記法を用いたのが、ニュートンです。ニュートンが運動の法則を考えついた頃、日本では関ヶ原の戦いをやっていた頃ですから日本が科学の面で外国に劣るのは当然とも言えます。しかしニュートンは罪も残しました。その最も大きなものが、絶対時間です。ニュートンは時間が空間の中をどこでも一様に刻んでいると考えました。この概念にニュートン自身は納得してはいなかったようですが、20世紀までこれがおかしいと考える人はおらず、盲目的に信じられていました。

この絶対時間なるものがおかしいと考えたのがアインシュタインでした。時速 40 km で走っているものを同じ速度で伴走すれば止まって見えることは容易に想像できます。電車やマラソン中継で目にした方も多いと思います。同じく、時速 40 km で走っているものを時速 20 km で走っているものから見れば時速 20 km で進んで見えることも容易に想像できると思います。これを、ガリレイ普遍性といいます。これが全てについて成り立てば絶対時間が成立するのですが、アインシュタインは 17 歳のときにガリレイ普遍性が光に対して成り立たないことに気がついたのです。これから、特殊相対性理論が生み出されました。アインシュタインが 23 歳のときでした。この理論は、高校の物理程度の知識で十分理解することができますので、興味ある人は是非一度読まれることを薦めます。

問題 2.4 電車が岡山駅と姫路駅の間 85 km を 30 分で走る．出発時の加速度が 1 m/s^2 ，到着時の加速度が $1/3 \text{ m/s}^2$ ならば出発時には何秒間加速すればよいか求めよ．ただし，途中で速度の変化はなく，時速 200 km を越えないものとする．

微分と差分 2.2

さて，微分係数の定義から Δx が充分小さければ元の微分に近いと考えられるので次式が成り立つと考えられます．

$$f(x + \Delta x) - f(x) \cong f'(x) \Delta x \cong \Delta y \quad (2.9)$$

上式の $f'(x) \Delta x$ 極限を取ったものを dx と書き，それを y の微分といいます．すなわち， $y = x^2$ を微分するとは $dy = 2x dx$ のことであり， $y' = 2x$ は y の x に関する導関数であることに注意しなければいけません．

いままで述べてきたことは連続な関数に対するものです．数値計算を行う場合，計算機の都合により極限をとることができないため，導関数を近似して取り扱うことになります（極限を取ることは無限の点を必要とすることであり，そのようなことはコンピュータ先生をもってしても不可能なのです）．すなわち (2.7) 式において h が十分に小さい数であれば次のように表すことができます．

$$\frac{dy}{dx} \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.10)$$

さて，導関数の近似はこれだけでしょうか？ いま図 2.1 の様に考えると導関数は 3 つの表現をとることができます（高校の教科書にも同様なことが示されています）．すなわち，ある点の勾配を求めるのにその点と前方，その点と後方，その点の前後の平均をとる方法が考えられます（他にもいろいろな方法があるのですがここではこれだけにしておきます）．

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (2.11)$$

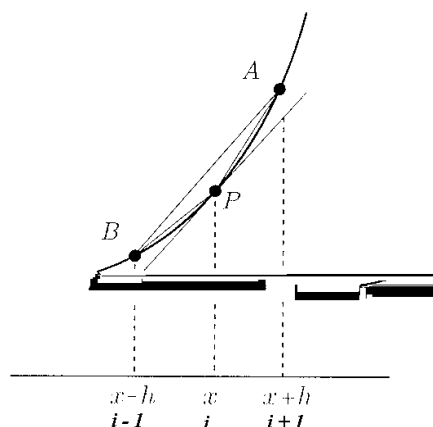


Fig. 2.1 Concept of approximation

$$\frac{df}{dx} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.12)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.13)$$

上式をそれぞれ前進差分 (forward difference, 中心差分 (central difference, 後退差分 (backward difference と呼びます。これらは近似であるので誤差を持っています。この誤差は大きな影響を与えるので正確に見積もっておく必要があります。誤差の大きさを正しく見積もるためにはテーラー展開を用いるのが便利です。

さて、教養の数学の教科書を開いて見ます。\$f_{i\pm 1}\$, \$f_{i\pm 2}\$ を \$x_i\$ の回りにテーラー展開すると次のようになります。

$$f_{i\pm 1} = f_i \pm \Delta x f'_i + \frac{1}{2!} \Delta x^2 f''_i \pm \frac{1}{3!} \Delta x^3 f'''_i \pm \frac{1}{(n_i - 1)!} \Delta x^{n_i - 1} f^{(n_i - 1)}_i \quad (2.14)$$

$$f_{i\pm 2} = f_i \pm 2\Delta x f'_i + \frac{1}{2!} (2\Delta x)^2 f''_i \pm \frac{1}{3!} (2\Delta x)^3 f'''_i \pm \frac{1}{(n_i - 1)!} (2\Delta x)^{n_i - 1} f^{(n_i - 1)}_i \quad (2.15)$$

(2.14) 式の差と和をとると、それぞれ次の中心差分の式が得られます。

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{1}{6} \Delta x^2 f''_i + O(\Delta x^4) \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{1}{12} \Delta x^2 f^{(4)}_i + O(\Delta x^4) \quad (2.17)$$

(2.16) 式, (2.17) 式は打ち切り誤差は共に \$\Delta x\$ の二次のオーダーです。(2.15) 式を用いることにより、さらに高精度の差分方程式を導くことができます。この打ち切り誤差の大きさは流れ解析に重大な影響を与えるので、正確に見積もっておく必要があります。(2.15) 式も用いると次式が導かれます。

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f_{i+2} - 8f_{i+1} + 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta x} + \frac{1}{30} \Delta x^4 f^{(5)}_i + O(\Delta x^6) \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12\Delta x^2} + \frac{1}{90} \Delta x^4 f^{(6)}_i + O(\Delta x^6) \quad (2.19)$$

$$\frac{d^4f}{dx^4} \approx \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta x^4} + \frac{1}{6} \Delta x^2 f^{(6)}_i + O(\Delta x^4) \quad (2.20)$$

上式はすべて \$i\$ 点について対称となっているため中心差分と呼ばれます。差分近似は上式の右辺第一項までを用い、第二項以下を切り捨てます。この第二項以下を打ち切り誤差と呼びます。当然のことながら、打ち切り誤差が小さいほど元の微分に近いため高精度になります。

多変数関数の場合も同様に扱えます。多変数関数の微分は偏微分 (partial di@erence) と呼ばれるため難しいと感じている人が多いですが、じつは高校の数学で同じようなことを習っているのです (動くものがたくさんある時は一つだけ動かすというやつです)。たとえば $z = x^2 + y^2$ を考えてみます。地図を見るとある位置を正確に知らせるには、東に何 m 、北に何 m というふうに指示します (あっちとかこっちとか言う表現は曖昧なのです)。これと同様に、ある関数の変化を示す場合も x 方向にどれだけ、 y 方向にどれだけというふうに示すのです。すなわち z の変化を dz とすると

$$dz = (x \text{ 方向の単位長さあたりの変化}) \mathbb{E} (x \text{ 方向の長さ}) \\ + (y \text{ 方向の単位長さあたりの変化}) \mathbb{E} (y \text{ 方向の長さ}) \quad (2.21)$$

さて、 x 方向の単位長さあたりの変化は x 方向の変化率ですから、 y が一定の線上で考えます。すなわち

$$\lim_{\mathbb{E} x \rightarrow 0} \frac{f(x + \mathbb{E} x; y) - f(x; y)}{\mathbb{E} x} \quad (y = \text{const.}) \quad (2.22)$$

上式は導関数ですが多変数なので 1 変数の場合と区別するために偏導関数と呼び $\frac{\partial f}{\partial x}$ と表します。したがって z を x で偏微分すれば

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad (2.23)$$

となります。つまり偏微分といっても常微分と同じように考えれば良いのです。常微分は変数が一つだけ、すなわち一次元の問題だけなのに対し、偏微分では多変数に基づいているので平面や空間を扱うことになります。上に書いた dz 、すなわち山の高さの変化は式で表すと以下ようになります。

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (2.24)$$

上式を全微分と呼びます。難しそうに聞こえますが、要は山の高さの変化率だと考えればよいのです。偏微分の定義は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\mathbb{E} x \rightarrow 0} \frac{f(x + \mathbb{E} x; y) - f(x; y)}{\mathbb{E} x} \quad (2.25)$$

と表されます。すなわち変化する方向が二つあり (地図における南北と東西の方向と考えてもよいでしょう)、その一つだけの変化量を扱うのです。 f を x で偏微分することは、 y 方向は固定して x 方向だけの变化率を求めるということなのです。

問題 2.5 $f = \log x + xy^3$ のとき f を x と y で偏微分せよ.

問題 2.6 $x = r \cos \mu$ のとき x を r と μ で偏微分せよ.

偏微分に対する差分近似はいくつかあります. これを説明するために, 図 2.2 に示すような格子点を考えます. i が x 方向を表し, j が y 方向を表します. 関数 f は, 図 2.2 の格子点の上で分布を持っています. したがって, x で偏微分するとは j が一定の線上で i 方向の変化を見ることであり, y で偏微分するとは i が一定の線上で j 方向の変化を見ることなのです. つまり偏微分を差分近似する場合もある線上で常微分と同じようにすれば良いのです. そうすると以下の差分公式が得られます.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (2.29)$$

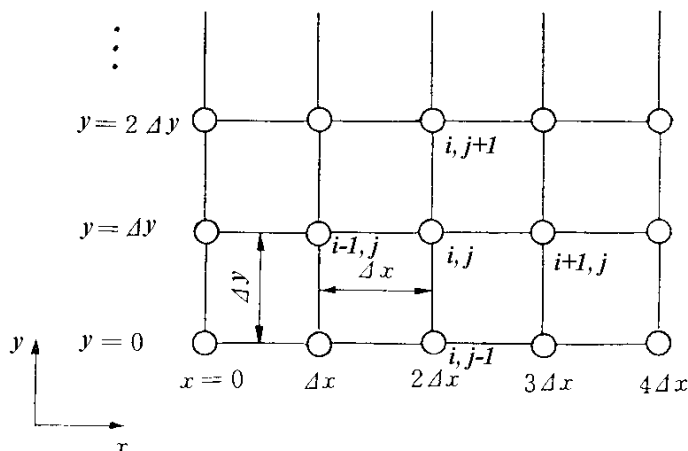


Fig. 2.2 Two dimensional grid points

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \\
 &= \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

上式の打ち切り誤差は常微分の場合と同様です。以上の関係を用いて、微分方程式を差分方程式に書き直して解くことにより数値解を得ることができます。すなわち、微分方程式の微分の部分を上式右辺で表される差分近似に置き換えて解くということです^{Y1}。

微分方程式 2.3

前節で微分の復習と差分近似が理解できたと思います。さて、つぎにこれらをどう適用するかが問題となります。その前に、微分方程式について復習することにします。微分方程式は授業で習ったと思いますが、微分方程式が何の役にたつんだろうと思って聞いている人も多いと思います。実はその微分方程式がこれから活躍するのです。我々の身の周りで生じている色々な現象は非常に複雑です。川の流れや空気の流れ、あるいは地震や津波、そのほかにも色々な現象があります。このような現象はそれぞれ微分方程式で表すことができるのです。それぞれの現象に対する微分方程式はさまざまですがここでは説明を行いませんが、工学で扱う微分方程式のほとんどがニュートンの第二法則なのです。すなわち、物質や物体の運動を表している微分方程式は、高校の時に習ったニュートンの第二法則なのです（ここで忘れていた運動の三法則を思い出そう！力学と呼ばれるものはすべて運動の法則で成り立っているのです。何故第一法則が慣性の法則になっているのかをよく考えてみて下さい。ニュートンはきちんと意味を持たせて順番にしているのです）。それが微分の形で難しく見えているだけなのです。

$$\text{質量 } m \times \text{加速度} = \text{力} : m \frac{d^2 x}{dt^2} = ma$$

の力と加速度が微分の形で表されているので分かりにくくなっているだけなのです。あとは質量保存の法則とエネルギー保存の法則があります。物体や物質の運動は運動の法則と保存則の上に成り立っているのです。保存則と書くとまた難しそうに聞こえますが、入り口から入った物は途中で逃げない限り必ず出口から出ていくという当たり前のことを表しているだけなのです。したがって、決して難しいものではないのです（詳しくは教科書を

^{Y1} 差分近似は他にもたくさんありますが、ここでは省略します。詳しくは数値解析の教科書を参照のこと。

参照のこと)。ここではその例として、流体力学で現れる一次元のオイラー方程式について説明してみます。教科書を見るとオイラー方程式は以下のように表されています。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.31)$$

これを見ただけで嫌気がさす人もいるかと思いますが、それは食わず嫌いだけです。よく考えてみると、これがニュートンの第二法則となっているのが分かるでしょう。まず両辺に ρ をかけます。そうすると $\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ の形になります。 ρ が m 、すなわち質量です。さて、それでは加速度はどうなるのでしょうか？ 加速度は速度を時間で割ったものです。したがって

$$a = \frac{du}{dt} \quad (2.32)$$

と表されます。ここで du を考えてみます。流速は時間が変われば変わるかもしれないし、また場所が変われば変わるかもしれません。このことを難しい言葉でいうと、流速は時間と場所の関数といい $u = u(t; x)$ と表されます。したがって流速の微小変化は

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (2.33)$$

と表されます。 u という分布をした山の高さがあり、ある地点から適当な方向の高さの変化を表すには、東西 (t) 方向と南北 (x) 方向の変化を足したものになるはずですが。すなわち、東西方向に単位長さあたり 1 m 変化していて 5 m 進んだものと、南北方向に単位長さあたり 1.5 m 変化していて 4 m 進んだ地点の山の高さは、元の地点より 11 m 高くなっていることになることが分かります。したがって、上式の両辺を微小時間で割ると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.34)$$

上式が加速度となります。すなわち、加速度は時間で変化する部分と空間的に変化する部分の和で表されていることが分かります。これから、オイラー方程式の左辺が加速度となっていることが分かります。右辺は圧力の変化を質量で割った形になっているのでオイラー方程式が $\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ の形になったニュートンの第二法則であることが分かります。他の式も多少面倒な場合もありますが、きちんと導くことが出来ます。

さて、このような方程式は一般に非線形の偏微分方程式で表されます。これらの方程式は現象を支配しているので、支配方程式 (governing equation) と呼ばれます。工学で現れる方程式はほとんどが次に示す三種類のパターンに分けられます。

¥ 非定常熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.35)$$

¥ 波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.36)$$

¥ 定常熱伝導方程式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.37)$$

これらの式は工学の問題によく現れる式なので、よく把握しておく必要があります。

さて、方程式にはある性質があり、それによって大きく三種類に分離することができます。そしてその種類によって適用する解析法や最適な解法が異なってくるのです。このことを説明するために、つぎの二階偏微分方程式を取り上げます。

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \quad (2.38)$$

上式において、 $b^2 < 4ac < 0$ の場合を楕円型、 $b^2 < 4ac = 0$ の場合を放物型、 $b^2 > 4ac > 0$ の場合を双曲型といいます。これによると、非定常熱伝導の方程式は放物型、波動方程式は双曲型、定常熱伝導は楕円型となります^{y2}。この方程式の型によって解析する方法が異なりますのでよく覚えておいてください。とくに、(2.37) 式は Laplace 方程式（ラプラスと読みます）と呼ばれます。この式の右辺が 0 でない場合は Poisson 方程式（ポアソンと読みます）と呼ばれます。(2.35) » (2.37) 式が何型になるのか調べてみよう。

さて、次に覚えておくことは方程式の種類です。次式を考えてみます。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = d \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (2.39)$$

さて方程式には線形と非線形とがあり、それぞれ性格が異なります。線形方程式は任意関数とその導関数の 1 次結合で表されます。2 次結合以上になると非線形となるのです。簡単に言うと

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (\text{線形: } f \text{ について 1 次}) \quad (2.40)$$

$$c \frac{df}{dx} = 0 \quad (c = \text{const.}) \quad (\text{線形: } f \text{ について 1 次}) \quad (2.41)$$

^{y2} 詳細は数学の教科書を参照のこと：たとえば、数学概論，寺沢寛一著。

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) \quad (\text{線形: } f \text{ について 1 次}) \quad (2.42)$$

$$f \frac{df}{dx} = 0 \quad f \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} f^2 \right) \quad (\text{非線形: } f \text{ について 2 次}) \quad (2.43)$$

$$c \frac{df}{dx} = 0 \quad (c = c(x)) \quad (\text{非線形: 従属変数が 2 次}) \quad (2.44)$$

もし関数なら次のようになるのは容易に分かります

$$\frac{d}{dx}(cf) = c \frac{df}{dx} + f \frac{dc}{dx} \quad (2.45)$$

したがって (2.39) 式は線形の偏微分方程式となります。線形方程式と非線形方程式では解析する方法がまったく異なるので、正しく判断できるようになっておいて下さい。

F コーヒーブレイク

¶ ナポレオンをめぐる数学者達 侯爵 ピエール=シモン・ド・ラプラス (1749 » 1827) ³



歴史の教科書にも必ず登場するかの有名なフランスのボナパルト・ナポレオンⅠ世は、ヨーロッパの征服をめざしたことで有名ですが、学者を政治に関わらせることもありました。その学者の中には、みなさんの数学や物理の教科書に出てくるラプラス、フーリエ、ラグランジュ、ルジャンドル、モンジュなどがいました。ここで取り上げるラプラスは、惑星の運動、非熱の測定、熱量の測定、毛管現象、音波の伝播、確率の解析的理論など数多くの分野において研究を行い、それぞれの分野で大きな功績を残しています。彼は流体力学に関しては直接関わっていませんが、本節で出てきたラプラス方程式は様々の物理現象を表しており、流体力学に関してはポテンシャル流れの支配方程式がこの形になっています。このように様々な功績を残したラプラスでしたが、人間的には時の政權に媚びる日和見主義者であり、あまり尊敬された人ではなかったようです。しかし不安定な政權のもとで研究を続けるためには仕方なかったのかもしれない。

μ

ここで、ニュートンの運動の法則を書いておきます。よく頭の中にたたき込んで下さい。

- (1) 慣性の法則
- (2) $F = ma$
- (3) 作用・反作用の法則

ガリレオの物体落下の法則は当然覚えているでしょうね？

簡単な物理現象の微分方程式 2.4

次章から、微分方程式を差分法で数値的に解析する方法を学んでいきます。当然、プログラムは自分で作成していきませんが、最初にありがちなのが「作ったものは間違いない」と思いこんでしまうことです。人間誰しもミスを犯しますし、特に初学者であればなおのことです。しかし、初学者には、ちょっと確認しただけで絶対あっている！だとか、間違っているはずがない！との思いこみも非常に起こしやすいのです。自分で作ったプログラムが正しいのかどうか、最初のうちは扱う微分方程式に厳密解が存在しますので、かならずその答えと比較を行う癖をつけましょう。厳密解と一致しなければ、間違いなくあなたのプログラムが間違っているのです。そのためには、微分方程式の厳密解を自分で求められるようになっておく必要があります。その方法を全部紹介することはできませんし、細かなことは数学の本を見てもらうのが一番ですが、ここでは「変数分離」という方法についてちょっと紹介をしておきます。

まず、熱伝導方程式を考えます。そのためには、エネルギー保存則というものを考えます。保存則といっても難しいことはなく、利益（損失）＝収入；支出が基本的な考え方です。これはどのようなものでも（家計でも物理法則でも）適用できます。たとえば、最初、財布の中身が4万円の状態で、昨日3万円収入があり今日1万円使ったら、収入が3万円で支出が1万円であるから（3万円；1万円） ± 1 日と言うことで一日あたり2万円の利益であることは誰でも理解できます。一方、財布の中身の時間変化は財布に残った量が基本となりますから、最後に残ったお金より最初からあったお金を引いたものが増减量（財布の中身の変化量、損失と異なることに注意）となることは当然でしょう（数学では微分と呼びますが、物理では変化量であることに注意）。最初に4万円あり、最後に6万円残っているから

$$6 \text{ 万円} - 4 \text{ 万円} = 2 \text{ 万円}$$

で与えられます．これが利益と釣り合っているのは言うまでもありません．これを数式で表すと

$$\frac{\text{財布 (7月2日)} - \text{財布 (7月1日)}}{\text{一日}} = \text{財布 (収入)} - \text{財布 (支出)} \quad (2.46)$$

支出は，センター街の西端から買い物を始めて東端で 1 万円が使われていたとします．これを少し数学的に書くと

$$\text{財布 (支出)} = \frac{\text{財布 (支出)}}{\text{センター街の長さ}} \times \text{センター街の長さ} \quad (2.47)$$

つまり，センター街が 500 m だとすると，1 m あたりの支出に換算して支出の変化率としたわけです．それにセンター街の長さを掛ければ，もとの支出総額になることは当たり前です．これを，

$$\frac{dM}{dx} = \frac{\text{財布 (支出)}}{\text{センター街の長さ}} \quad (2.48)$$

と置き換えれば，数学的な表現になります．つまり，微分で表してあっても，その意味は普段考えている財布の中身の勘定と同じなのです．

物理量を扱う場合の「財布」を「検査体積」と呼びます．いま，図 2.3 に示す検査体積を考えます．ある時刻から微小時間 dt の間に左側の壁 (ABCD) から検査体積にもらっ

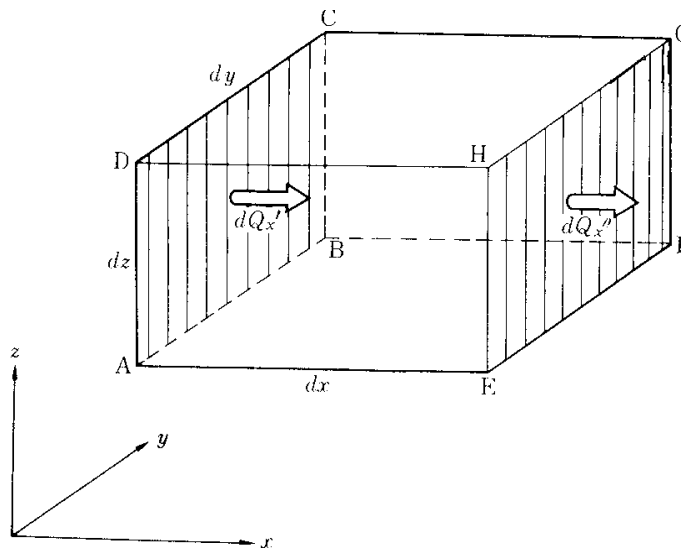


Fig. 2.3 Control volume

た熱量は

$$dQ^0 = i, \frac{\partial \mu}{\partial x} dydz \, \phi dt \quad (2.49)$$

この同じ時間間隔で、右の壁（EFGH）から逃げた熱量は

$$dQ^0 = i, \frac{\partial \mu}{\partial x} \mu + \frac{\partial \mu}{\partial x} dx dydz \, \phi dt \quad (2.50)$$

これらの差が、検査体積に蓄えられた熱量であるから、検査体積は温度が上がるはずである（収入が支出より多かったので財布の中身が増えた）。

$$dQ^0 = c_p \frac{1}{2} dx dydz \frac{\partial \mu}{\partial t} \phi dt \quad (2.51)$$

この検査体積は寒かったので、内部でストーブを焚いていたとすると、ストーブの発熱量は

$$dQ_s = q dx dydz \, \phi dt \quad (2.52)$$

これらの収支をとれば、財布（検査体積）で増えた量 = 収入（入ってきた物理量） i 支出（出ていった物理量）ですから

$$c_p \frac{1}{2} dx dydz \frac{\partial \mu}{\partial t} \phi dt = i, \frac{\partial \mu}{\partial x} dydz \, \phi dt - i, \frac{\partial \mu}{\partial x} \mu + \frac{\partial \mu}{\partial x} dx dydz \, \phi dt \quad (2.53)$$

したがって、両辺を $c_p \frac{1}{2} dx dydz \, \phi dt$ で割れば、以下の式が容易に得られます。

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial x} + q = a \frac{\partial \mu}{\partial x} + q \quad (2.54)$$

上式において a は温度伝導率と呼ばれます。上式が検査体積（財布）での熱の（お金の）家計簿を表した式になりますが、これを熱伝導の基礎式、すなわちエネルギー保存式と呼ぶことにします。簡単のため、検査体積にはストーブはないものとする、熱伝導の基礎式は

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = a \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad (2.55)$$

微分方程式の厳密解 2.5

物理現象の微分方程式が求められましたので、この方程式の厳密解を求めることにします。前節で述べましたように、変数分離という方法について説明することにします。上の

方程式には交差微分項 $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial t}$ が含まれていません。したがって $f(x; t)$ という形の解がないことがすぐに分かります ($\sin(at + bx)$ などの様な解がない)。したがって, $F(x)$, $G(t)$ のような一価関数の組み合わせで解が表されます。左辺は時間で一階微分したもので, 右辺は x で二階微分したものでそれが等しいということは, $\mu(x; t) = F(x)G(t)$ のように変数が分離できることを示しています。これを変数分離と呼び, 支配方程式に代入すると

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = F \frac{dG}{dt}; \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{dF}{dx} G; \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = \frac{d^2 F}{dx^2} G \quad (2.56)$$

となりますから

$$F \frac{dG}{dt} = a \frac{d^2 F}{dx^2} G \quad (2.57)$$

よって

$$\frac{1}{aG} \frac{dG}{dt} = \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} G \quad (2.58)$$

上式が成り立つためには左辺, 右辺ともに定数の時だけです。それを k とおくと

$$\frac{dG}{dt} + k a G = 0; \quad \frac{d^2 F}{dx^2} + k F = 0 \quad (2.59)$$

これらは $k < 0$ の時だけ意味を持つ解となります (それ以外が意味を持たないことは各自確認せよ)。そこで $k^2 = -p$ とおくと

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + p^2 F = 0 \quad (2.60)$$

この常微分方程式の一般解は, 数学の授業を振り返れば

$$y = A \cos px + B \sin px \quad (2.61)$$

ここでは, 長さ l の真っ直ぐな棒の両端が常に 0°C で, 初期の温度分布が $\mu(x; 0) = f_0(x)$ の場合について考えてみます。

¥ 二階線形常微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 = 0 \quad (2.62)$$

を考えてみます。いま, $y = e^x$ を代入してみると, $e^x + a_1 e^x + a_2 e^x = 0$ が得られます。 $e^x \neq 0$ であるので, $1 + a_1 + a_2 = 0$ の二次方程式が得られます。この方程式の

根をそれぞれ α , β とすると, 元の微分方程式は $(\frac{d}{dx} - \alpha)(\frac{d}{dx} - \beta)y = 0$ と表されることが容易に分かります. すなわち $y = e^{\alpha x}$, $y = e^{\beta x}$ がそれぞれ元の微分方程式の解になることが分かります (代入すれば 0 になるから方程式を満たす). 当然, $y = C_1 e^{\alpha x}$ (C_1 は任意の定数) も元の方程式の解になっていることが分かるし, (2.61) 式も元の微分方程式の解になっていることが容易に分かります.

さて, この二次方程式の解は, 条件によって 3 通りに分かれることは高校 (中学) のときに学んでいます. 二つの実根の場合は上に示したとおりで, 重根の場合は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} \quad (2.63)$$

虚根の場合は $\alpha = a + ib$, $\beta = a - ib$ で与えられますから

$$\begin{aligned} y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} &= e^{ax} (C_1 e^{ibx} + C_2 e^{-ibx}) \\ &= e^{ax} [(C_1 + C_2) \cos bx + i(C_1 - C_2) \sin bx] \\ &= e^{ax} (A \cos bx + B \sin bx) \end{aligned} \quad (2.64)$$

さて, 上で示した復習から元の熱伝導に話を戻します. 熱伝導の式を, 変数分離で常微分方程式に変換し, その一般解が

$$y = A \cos px + B \sin px \quad (2.65)$$

で表されることが分かりました. ここに, 初期条件と境界条件を適用することにします. まず, $F(0) = A$. また, $G \neq 0$, $F(l) = 0$. よって $A = 0$. したがって, $F(l) = B \sin pl$. 条件より, $B \neq 0$ でなければいけません. また $F(l) = 0$ から

$$B \sin pl = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{n\pi}{l} \quad (2.66)$$

いま $B = 1$ とおくと

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2.67)$$

これは棒の両端が常に 0°C であることを満足しています. ここで

$$k = -p^2 = -\frac{(n\pi)^2}{l^2}; \quad a = c^2 \quad (2.68)$$

とおくと元の微分方程式は以下のように書き換えられます.

$$\frac{dG}{dt} + \frac{c^2(n\pi)^2}{l^2} G = 0 \quad \text{よって} \quad \frac{dG}{dt} + \lambda_n^2 G = 0 \quad (2.69)$$

ただし, $\omega_n = \frac{c(n\pi/4)}{l}$. これは微分方程式の入門編であるので (変数分離形)

$$G_n(t) = B_n e^{i \omega_n^2 t} \quad (n = 1; 2; \dots) \quad (2.70)$$

したがって, 変数分離の形まで戻れば

$$\mu_n(x; t) = F_n(x) \phi G_n(t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{4l} \exp(i \omega_n^2 t) \quad (2.71)$$

上式はある n の特解であるので, 一般解は総和をとれば求まります. したがって, これで境界条件を満足する一般解が求められたので, 初期条件を満足する解を求めます.

$$\mu(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{4l} \exp(i \omega_n^2 t) \quad (2.72)$$

初期温度は $\mu(x; 0) = f_0(x)$ ですから

$$\mu(x; 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(x; 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{4l} f_0(x) \quad (2.73)$$

ちょっと面倒ですが, 高校生レベルの数学力で十分解いていくことができます.

F コーヒーブレイク

¶ ジョセフ・フーリエ (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768 » 1830)

3



フーリエは1768年3月21日、フランス中部、ヨンヌ県のオセールで仕立屋の息子として生まれました。幼くして父親を亡くしたフーリエは、陸軍幼年学校へ入学させられえましたが、そこで数学に興味を示し、夜中になってから蝋燭の燃えさしを集めて一人で勉強に没頭した。1789年、『定方程式の解法』と題した論文を発表するためパリへ向かい、そこでフランス革命に遭遇しました。

フーリエは、エジプト遠征中に発揮した行政・外交手腕をナポレオンに認められ、1802年1月2日にイゼール県知事に任命されました。知事として多忙な職務をこなし、エコール・ポリテクニークから続けていた方程式論の研究をする一方、固体内における熱伝導を数学的に研究した彼は、熱伝導に関する最初の論文を1807年にアカデミー・デ・シアンスに提出しました。アカデミーは内容が不十分だとして掲載は見送りましたが、その有望さから1812年の懸賞論文の題目を「熱の解析的理論」とし、アカデミー大賞を受賞しました。これが今日のフーリエ級数と解析です。

彼は、色々なことに興味を持っていたようで、エジプトから持ち帰った史料の中にあったロゼッタ・ストーンを、自身のサロンに出入りしていた当時12歳のシャンポリオンに初めて見せたのもフーリエでした。刻まれている三種の文字のうちの一つ（ヒエログリフ）が未解読であることを告げられたシャンポリオンは、「自分がいつか読んでみせる」と宣言し、約20年の歳月をかけて解読に成功することになります。

ライプツィヒの戦いで敗れたナポレオンは、1814年に退位してエルバ島へ流され、

彼に認められていたフーリエは、ラプラスらとともに寝返ってルイ 18 世に忠誠を誓ったため、知事を続けることを認められました。ところが、エルバ島を脱出したナポレオンはフランスに帰還し、フーリエは捕らえられてしまったのです。しかし、フーリエは再びナポレオンに従ってローヌ県知事に任命されます。

しかしながら、ワーテルローの戦いののちナポレオンはセントヘレナ島へ流され、フランスはみたび王政に戻りました。復位したルイ 18 世は裏切りを許さず、フーリエは罷免されます。このころ、生命保険に関する研究を行っていました。1816 年、アカデミー・デ・シアンスはフーリエを会員に推薦したが、ルイ 18 世はそれを認めなかった。しかしアカデミーは抵抗し、翌年彼は会員に選出されました。さらにその後もルイ 18 世やポアソンの反対にもかかわらず勢力を伸ばして 1822 年には終身幹事に、1826 年にはアカデミー・フランセーズ会員となりました。他にもラプラスの後をついでエコール・ポリテクニクの理事長になるなど、フーリエの晩年はナポレオンに最後まで従ったため悲惨な末路を辿ったモンジュなどと比べれば、名誉に満ちたものでした。

最後の数年、フーリエは過去の研究をまとめ、それまでに発表した論文を出版するために費やしました。また、後進の指導にも力を注ぎ、フーリエ級数が収束するために必要な「ディリクレの条件」を導いたディリクレは彼の教え子の一人です。1830 年 5 月 16 日、世情が再び革命（7 月革命）へと動いていく中でフーリエは息を引き取りました。63 歳でした。20 代の頃から続けていた方程式論の研究をまとめるべく全 7 巻の予定で執筆途中だった『定方程式の解析』は、あのナビエが遺稿をまとめて 1831 年に 2 冊だけが出版されました。こんなところも流体と縁があるのかもしれませんが。

3

差分法入門

Approach of Finite Difference Method

一次元非定常熱伝導 3.1

さて、いよいよ差分法を用いた計算を行います。前章で熱伝導の基礎式である微分方程式が導かれましたので、まず熱伝導現象を差分法で数値的に解析することを考えます。厳密解も導出されましたので、プログラムが正しいかどうかのチェックも容易なはずです。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

上式において a は温度伝導率です。以下、簡単にするため $a = 1$ とします（無次元化する方法もありますがここでは説明しません）。さて上式を離散化しますが、最も簡単な方法は時間微分項、空間微分項の双方について中心差分を取る方法です。しかしながら、残念なことにこの方法は安定な計算ができないことが知られています（これはイギリスの気象学者リチャードソンが最初に行ったもので結果は大失敗に終わりました）。そこで、空間微分項については中心差分、時間項について前進差分を用いると以下の式が得られます

(これを FTCS (Forward Time Centered Space) といいます。こう書くとかっこ良く聞こえますが、要は時間前進空間中心を英語に直しただけなのです。英語でいうとかっこ良く聞こえるので、大学の人間はよく使うのです)。

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (3.2)$$

上式において T は温度を表す。また n は時刻を示し i は点の位置を示す。 n は現在を示し $n+1$ は Δt だけ未来であることを示す。ここで右辺の空間微分項の温度を現在で用いるか、未来で用いるか、二つの方法が考えられます (他にもいろいろあります)。ここでは右辺を現在で評価すると

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (3.3)$$

上式は、微分方程式の微分演算子を差分演算子に変換したものであるので、差分方程式と呼ばれます。上式においてまだ分からないもの、すなわち未知数は左辺の T_i^{n+1} だけです。そこで式を、未知数 = 既知数 の関数という形に変形すると次式のようにになります。

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \quad (3.4)$$

上式により i 点の $n+1$ 時刻の温度が計算されます。すなわちある時刻の温度分布が分かっている場合に、その Δt 後の温度を求めることができます。上式を、Fortran プログラムの型式で表せば以下のように書かれます。

```
do i=2,nx-1
  t(i)=to(i)+dt/(dx      ** 2) * (to(i+1)-2.d0      * to(i)+to(i-1))
end do
do i=1,nx
  to(i)=t(i)
end do
```

C プログラムの型式で表せば以下のように書かれます。

```
for (i=2; i<=nx-1;++i)
{
  t[i]=to[i]+dt/pow(dx,2.0)      * (to[i+1]-2.0      * to[i]+to[i-1]);
}
for (i=1; i<=nx;++i)
{
  to[i]=t[i];
}
```

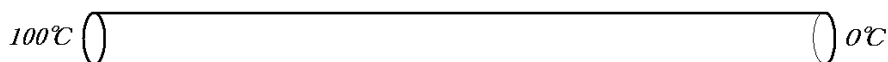


Fig. 3.1 One dimensional bar

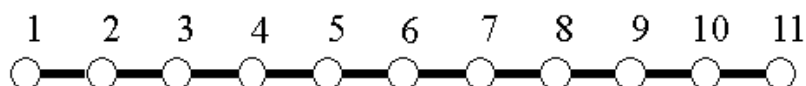


Fig. 3.2 Discretization

Visual Basic プログラムの型式では、以下のように書かれます。

```

For i = 2 To nx-1
    t(i)=to(i)+dt/(dx^2)      * (to(i+1)-2.0      * to(i)+to(i-1))
Next i
For i = 1 To nx
    to(i)=t(i)
Next i

```

nx は点の数です。いずれも、 t が $n+1$ 時刻の温度、 to が n 時刻の温度を表します。また、次の時間の温度を計算するために、計算が終わった後、 $n+1$ 時刻の温度を n 時刻の温度の変数へ代入します。これによって、たとえば $n=2$ の温度が t とすれば、それを to に代入しますので、 n を 3 にしたことになります。例として細長い棒の温度分布を計算することにします。図のように棒の左端が 100%，右端が 0%としたときの温度分布を (3.4) 式で計算を行いますが、このままでは i 点をどこに取ればよいのか分かりません。そこで次のように棒を点の集合で置き換えます。計算は、図 3.2 の点の部分だけで行います。このように連続なものを点のような不連続なものに置き換えることを離散化といいます。ここで疑問を持たれた方もいるかと思いますが、棒は連続なのにそれを点の集合で置き換えたもので正しいのだろうか？

実は、これを解決するものが高校の数学で習った微分なのです（結構重要なことを習っているのです）。ある式の極値があるとか無いとかを計算したことがあると思いますが、それが役に立つのです。すなわち、差分近似の極限が元の微分に収束すれば、その差分近似で作った差分方程式は連続なものの近似となることが保証されるのです。たとえば、棒を 3 点で離散化したとします。この場合、未知の点は中央の一点だけです。このとき差分

方程式に境界条件を代入すると簡単に 50 %の答えが出てきます. そしてこれは厳密解と一致します. このように少ない点数でも精度良く答えが出てくるのも, 差分近似が微分係数に収束するからなのです.

ところで, 図 3.2 の点 1 と 11 は 100 %と 0 %という温度に決まっているので, 計算する必要はありません. このように端の点で未知数である温度を指定するものを境界条件といいます. したがって, 2 ≫ 10 までを計算すれば棒の内部の温度変化を計算することができます. さっそくプログラムを作ってみよう (この問題は厳密解 (解析解) が求まっているので比較してみましょう). 以下に問題とその答えを示しておきます. この問題はプログラムが正確にできていないと答えが一致しません. プログラムの一行一行に気をつけて倍精度計算を行うことで正解が得られるでしょう.

問題 3.1 一次元非定常熱伝導のプログラムを完成させよ. そして, 以下の例題を解析してみよ. 初期に棒の温度が以下のような分布であるとする.

$$0 \leq x \leq 0.5 \quad \text{において} \quad T = 2x$$
$$0.5 \leq x \leq 1 \quad \text{において} \quad T = 2(1 - x)$$

境界条件は棒の左右端で 0 とする. このとき時間間隔を 0.001, 空間間隔は 0.1 として時間 0.02 まで計算を行え. 答えは以下ようになります. ならない場合はプログラムが間違っています. 間違った場合は, 自分でどこが違っているのかを調査しましょう. このように, 原因を調査することを investigation と言います.

Table 3.1 Computational result

時刻	x = 0	x = 0:1	x = 0:2	x = 0:3	x = 0:4	x = 0:5	x = 0:6
0:000	0:0000	02000	04000	06000	08000	10000	08000
0:001	0:0000	02000	04000	06000	08000	09600	08000
0:002	0:0000	02000	04000	06000	07960	09280	07960
0:003	0:0000	02000	04000	05996	07896	09016	07896
0:004	0:0000	02000	04000	05986	07818	08792	07818
0:005	0:0000	02000	03999	05971	07732	08597	07732
0:010	0:0000	01996	03968	05822	07281	07867	07281
0:020	0:0000	01938	03781	05373	06486	06891	06486

問題 3.2 上問で、 $x = 0:5$ で対称である条件を適用し、半分の領域で解析を行え（条件は同じであるから答えも同じになる）。

問題 3.3 棒の長さを 1 とし、11 点に離散化する（10 分割することです）。棒の両端は 0% で固定され、内部の温度が

$$0 \cdot x \cdot 0:5 \quad \text{において} \quad T = 2x$$
$$0:5 \cdot x \cdot 1 \quad \text{において} \quad T = 2(1 - x)$$

であるとする。このとき $\Delta t = \Delta x^2 = 0:4$ の場合と $\Delta t = \Delta x^2 = 0:6$ について計算を行ってみよ。ただし、時刻は 0.036 までとする。

Table 3.2 Relation between grid width and time increment

比率	$x = 0$	$x = 0:1$	$x = 0:2$	$x = 0:3$	$x = 0:4$	$x = 0:5$
0:4	0:00000	017411	033287	046062	054423	057302
0:6	0:00000	020000	027558	055162	041984	070324

この問題を行った結果を見ると、 $\Delta t = \Delta x^2 = 0:6$ の結果は物理的にみておかしいものとなっています。自然に冷却する問題で、温度分布が内部でギザギザになることはあり得ません。なぜこのような結果になったのでしょうか？ $\Delta t = \Delta x^2 = 0:4$ の結果がおかしくないのを見ると、どうも $\Delta t = \Delta x^2$ が重要な役割を果たしているようです。

陽解法の安定性

3.2

前節で説明した方法は、未知数が左辺にまとめられ、右辺の既知数の計算だけで計算することが出来ます。このように、未知数が明らかになっている物を陽解法（explicit method）といいます。前節の結果を見ると、時間間隔と空間間隔は何でもいいという訳にはいかないようです。陽解法による解析法は実際に計算してみると、時間刻みが小さくないと計算は発散してしまうことが分かります。そこで、時間刻みをどの程度にするべきかを検討してみます。これにはフォン・ノイマンの安定解析を用いることが多いのです。どのような方法かというと、ある時刻において差分方程式に変動波を入力してやり、もし計算が安定に進むとすれば波はおさまってくるはずですが、逆に、計算が発散するとすれば波は増幅されるはずですが。

抽象的な表現で分かりにくいと思いますので、具体的に説明してみます。変動波というのは微小擾乱のこと、すなわち小さい乱れのことです。どういうことかという、たとえば0.0001を一万回足してみます。電卓で計算すれば答えは予想したとおり1になります。しかし、この計算をコンピュータで行うと1にはなりません。これはコンピュータが計算するとき、十進法を用いずに二進法を用いているからなのです。実数を二進法で書くと無限に続く数となることが多くあります（十進法の数を変換する方法を高校のときに習ったと思います。たとえば0.3を二進法に変換してみてください）。コンピュータはこのような場合、有限の桁数で打ち切って計算を行っているのです。したがってこのときに誤差が生じ、この誤差を丸め誤差と呼びます。上で述べた微小擾乱というのはこの丸め誤差のことなのです。丸め誤差が成長していけば、そのうち誤差がたまって計算は発散してしまいます。変動波が減衰する、すなわち本来あってはいけな丸め誤差が減衰しなければ計算は安定しないということなのです。入力する波としてはsin波とcos波の合成波を用います。

$$g \exp(i \gg x) \quad * \quad I = \frac{P}{i \quad 1} \quad (3.5)$$

オイラーの公式を思い出そう！ $\exp(i\mu) = \cos \mu + i \sin \mu$

n 時刻の温度に代入すると

$$T^n = g^n \exp(i \gg x) \quad (3.6)$$

上式を (3.4) 式に代入すると

$$\begin{aligned} g &= \frac{g^{n+1}}{g^n} \\ &= \frac{\phi t}{\phi x^2} \exp(i \gg x) + \frac{\mu}{1 i \quad 2 \frac{\phi t}{\phi x^2}} + \frac{\phi t}{\phi x^2} \exp(i \gg x) \\ &= 1 i \quad 2 \frac{\phi t}{\phi x^2} + 2 \frac{\phi t}{\phi x^2} \cos(\gg x) \\ &= 1 i \quad 2 \frac{\phi t}{\phi x^2} [1 i \quad \cos(\gg x)] \\ &= 1 i \quad 2 \frac{\phi t}{\phi x^2} \phi 2 \sin^2 \frac{\gg x}{2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

上式において g は増幅率と呼ばれ、次の条件を満たすとき安定となります。上で述べたように、この増幅率が1より小さくなければ波はどんどん大きくなっていき、遂には爆発（発散）してしまいます（計算で発散というのは、計算機で取り扱える最大の大きさを越えてしまうことをいいます）。

$$|g| \cdot 1 + K \phi t \quad (3.8)$$

K は正の定数です (実際は $K = 0$ のとき, すなわち増幅率が 1 以下になることが安定条件となります). 上式をフォン・ノイマンの条件といいます. 簡単に言えば $g = g^{n+1} = g^n < 1$ ということは $n+1$ 時刻の波は n 時刻の波より小さくなるので, 時間がたつにつれて波は小さくなるので安定であり, 逆に $g = g^{n+1} = g^n > 1$ ということは波がどんどん大きくなるので最後には解が発散してしまうということなのです. (3.7) 式, (3.8) 式より以下の不等式が導かれます.

$$1 - K \Delta t \cdot 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 + K \Delta t \quad (3.9)$$

上式で $0 \leq \sin^2 \frac{\Delta x}{2} \leq 1$ であるので, 右辺の不等式は常に成り立ちます. したがって左辺の不等式が成り立てばよいので

$$4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\Delta x}{2} \leq 2 + K \Delta t \quad (3.10)$$

左辺が最大となるのは $\sin$ の項が 1 のときであるから

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{K}{4} \Delta t \quad (3.11)$$

右辺が最も小さくなるのは $K = 0$ のときであるから, 次式が導かれます.

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.12)$$

上式が一次元非定常熱伝導方程式を陽解法で解析する場合の, 空間分割と時間分割の制限になります. 同様な手法を用いて調査を行うと, 二次元, 三次元の場合にはさらに厳しい条件となります. すなわち, 差分法で計算を行う場合は空間の間隔と時間の間隔の取り方に決まりがあり, その決まりを守らないと, 安定で正確な計算が出来なくなるのです. 一次元非定常熱伝導の問題 3.3 で $\Delta t = \Delta x^2 = 0.6$ の計算がおかしかったのは, 安定条件を満足していなかったからなのです. 一次元非定常熱伝導のところで述べたリチャードソンの方法は, 安定解析によると, 無条件不安定, すなわち Δx と Δt の間がどのような関係であろうと計算は発散するのです (各自確認しなさい). このように, 差分方程式に変換したときに時間刻みと空間分割にある構造を持たせていかなければならないとき, これをスキーム (scheme) と呼びます. また (3.12) 式から分かることは, 陽解法を用いる場合, 二次元や三次元の計算をするときに格子点数を多くとるためには Δx^2 に反比例して時間間隔 Δt を小さくしなければなりません. つまり格子点数を 100 倍に増やすためには時間間隔 Δt を 1 万分の 1 にしなければいけないのです. こうなると計算の時間は非常に長くなります. この陽解法に対して後で述べる陰解法 (implicit method) を用いると時間間隔

Δt を大きくとることができます。よって、ここで扱った二階微分で表される方程式ではなるべく陰解法を用いたほうが良いと思います（陰解法については後の節で説明します）。このように偏微分方程式を差分法で解析する場合、安定条件はよく頭にいられておく必要があります。

二次元非定常熱伝導 3.3

前節で一次元非定常熱伝導が計算できました。ここでは二次元非定常熱伝導について計算することにします。まず、基礎式は次式で示されます。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.13)$$

一次元の場合と同様に差分近似を用い、差分方程式に書き直します。

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad (3.14)$$

未知数 = 既知数 の形に変形すると

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \Delta t \left[\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \quad (3.15)$$

一次元の場合と同様に、Fortran 形式で書けば

```
do j=2,ny-1
  do i=2,nx-1
    t(i,j)=to(i,j)+dt/(dx** 2) * (to(i+1,j)-2.d0 * to(i,j)+to(i-1,j))
    & +dt/(dy** 2) * (to(i,j+1)-2.d0 * to(i,j)+to(i,j-1))
  end do
end do
do j=1,ny
  do i=1,nx
    to(i,j)=t(i,j)
  end do
end do
```

C プログラムの型式で表せば以下のように書かれます。

```
for (j=2; j<=ny-1;++j)
{
  for (i=2; i<=nx-1;++i)
  {
    t[i][j]=to[i][j]+dt/pow(dx,2.0) * (to[i+1][j]-2.0 * to[i][j]+to[i-1][j])
    +dt/pow(dy,2.0) * (to[i][j+1]-2.0 * to[i][j]+to[i][j-1])
```

```

                                +dt/pow(dy,2.0)    * (to[i][j+1]-2.0    * to[i][j]+to[i][j-1];
                                }
                                }
for (j=1; j<=ny;++j)
{
for (i=1; i<=nx;++i)
{
    to[i][j]=t[i][j];
}
}
}

```

Visual Basic プログラムの型式では、以下のように書かれます。

```

For j = 1 To ny-1
For i = 1 To nx-1
    t(i,j)=to(i,j)+dt/(dx^2)    * (to(i+1,j)-2.0    * to(i,j)+to(i-1,j) _
                                +dt/(dy^2)    * (to(i,j+1)-2.0    * to(i,j)+to(i,j-1)
Next i
Next j

```

今度は下のような板で計算します。この問題は両端が沸騰したお湯と氷に接していて、上下が断熱材で外気と遮断されているというものです。この板を離散化します。一次元の場合と同様に点の集合に置き換えると、一次元の場合と同様に境界をのぞいた内側の点（内点）を計算します。一次元の場合と異なるのは、断熱の条件です。これは流入する熱量が

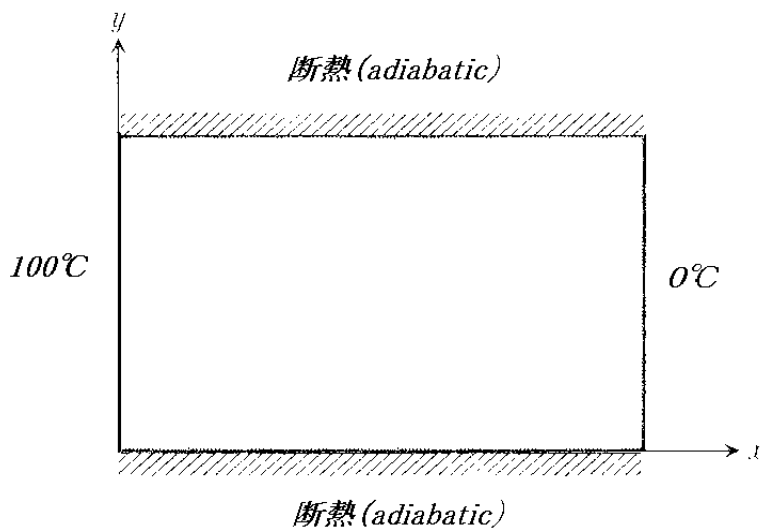


Fig. 3.3 Two-dimensional plate

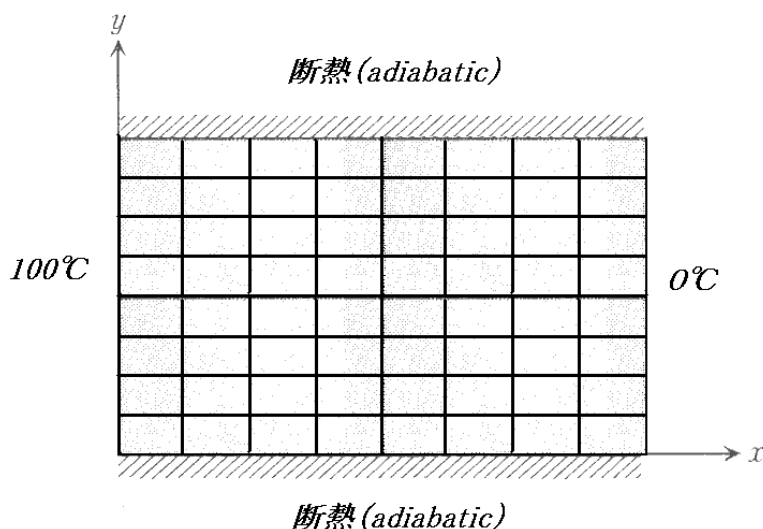


Fig. 3.4 Discretization

0, すなわち $q=0$ ということです. 伝熱の本を見ると

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (n \text{ は法線方向}) \quad (3.16)$$

したがって断熱の条件は, 外部との熱の出入りがないということなので以下のように表されます.

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (3.17)$$

n を y 方向に取り, 上式を差分近似すると

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} = 0; \quad T_{i,j+1} = T_{i,j} \quad (3.18)$$

すなわち, 壁の点と壁から一つはなれた点の温度を等しいと置くことで断熱の条件が満たされます. このように境界条件は温度を指定する, すなわち従属変数を指定するものと従属変数の微分形で与えられるものに分けられます. これを専門的な言葉で表すと, 前者をディリクレ型条件, 後者をノイマン型条件と呼びます. ノイマン型の境界条件の処理の方法は他にもありますが, ここでは省略します (境界条件はこの他にもあるのですが, 熱関係の解析を行わなければこれだけでほとんどの問題が解決されます).

問題 3.4 一次元非定常熱伝導のプログラムを二次元非定常熱伝導の問題に書き直しなさい。

問題 3.5 分割を 10 として左の壁を 0, 右の壁を 100, 時間間隔 0.001 で時間 2 まで計算を行え。

適合性 3.4

これまでの説明で、差分法とは微分方程式を差分近似によって差分方程式に書き直して解析することが分かったと思います。この節では、差分法の理論として最も重要な適合性について説明します。差分法で解析を行っているのは何のためでしょうか？それは、微分方程式の解を得るためです！自然現象はそのほとんどが非線形な現象であるため、その支配方程式も非線形になります。非線形方程式に限らず微分方程式は、その解析解が得られる場合はほとんどありません。そのため、何らかの近似解を得るために差分法を用いているのです（もちろん近似解を得る方法は他にもたくさんあります）。したがって、差分法で解いた数値解が元の微分方程式の近似解となっていることが保証されていなければ、その数値解は無意味なものになってしまうのです。

さて、まず第一に次の条件が満足されていなければなりません。

F 差分間隔を 0 に近づけていったとき差分方程式が微分方程式に収束する。

これは当然の条件です。さて、非定常解析を行う場合は空間の離散化と時間の離散化の両方が必要でした。したがって、差分間隔も時間と空間の二つになります。このとき、時間間隔と空間間隔の間に何らかの関係（たとえば時間間隔は空間間隔の十分の一であるとか）があるとき、差分方程式は差分スキーム（scheme と呼ばれます。この差分スキームに微分方程式の解を代入し、差分間隔を 0 に近づけて行きます。これをパターン B としましょう。そして差分スキームの間隔を 0 に近づける場合をパターン A としましょう。このとき、パターン A よりパターン B の方が速く収束した場合、微分方程式と差分スキームはコンシステント（consistent）であるといいます。

つぎに、差分演算を n 回行ったとします（このことを難しい言葉でいうと任意の初期値に差分演算子を n 回作用させた場合となります。このように大学の人間は簡単なことでも難しくいうのです）。このとき、 n 回後の数値解が初期値に比べたとき

C ε （初期値）、 n 回後の数値解

となるような定数 C が存在するとき、差分スキームは安定であるといいます。要は、何回か計算したときにそのときの解が初期値に比べある定数倍ぐらいにしかならない、すなわち無限大倍、発散しないということです。発散しなければ安定であるという当たり前のことです。これを Lax の同値定理といいます。ここで説明した条件は、2章で説明したような適切な差分スキームを用いれば無条件に満足されるので、実際の計算において意識する必要はありません。ただ、知っておけば学があると思われます（二次精度以上の差分スキームであればコンシステントです）。

一次元定常熱伝導 3.5

前節までに非定常熱伝導の解析法について説明を行いました。しかし、工学の問題では非定常現象よりも、むしろ定常問題を扱うことが多いのです。そこで本節では、定常熱伝導の解析法について説明を行います。まず、基礎式は以下のように表されます。

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.19)$$

この式は数値計算するまでもなく簡単に解析解が求められます ($T = ax + b$) が、とりあえず計算してみることにします。差分方程式に直すと

$$\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{\Delta x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = 0 \quad (3.20)$$

さて、(3.20) 式を与えられた境界条件の下で解析すればよいのですが、この場合は式中の T がすべて未知数であるため、格子点全体に (3.20) 式を作り、その連立方程式を解かなければなりません。具体的に説明するためにつぎの問題を考えてみます。

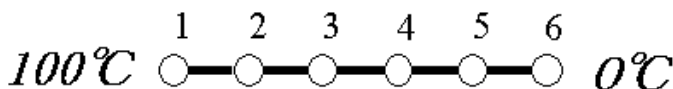


Fig. 3.5 Discretization of bar

1 と 6 は境界であるから計算を行う必要はありません。したがって 2 ≧ 5 までについて式

をたてます.

2 の点 $T_1 \text{ i } 2T_2 + T_3 = 0$
3 の点 $T_2 \text{ i } 2T_3 + T_4 = 0$
4 の点 $T_3 \text{ i } 2T_4 + T_5 = 0$
5 の点 $T_4 \text{ i } 2T_5 + T_6 = 0$

これらの式をまとめて書くには行列表示が便利です (線形代数がこんなところで役にたってくるのです). そうすると以下のように表されます.

0 1 0 0 0 0 0 1 8 9 8 9
1 1 2 1 0 0 0 T₁ 100
0 1 2 1 0 0 0 T₂ 0
0 0 1 2 1 0 0 T₃ 0
0 0 0 1 2 1 0 T₄ 0
0 0 0 0 0 1 1 T₅ 0
0 0 0 0 0 1 T₆ 0
(3.21)

(3.21) 式の左辺の逆行列を左から両辺に掛けることで $T_2 \gg T_5$ が求まります. しかし, 逆行列を掛けることは計算量が増すので, ガウスの消去法を通常用います. ガウスの消去法というと難しく聞こえますが, 実は中学校で習っているのです. いま, 次の方程式を考えます.

2x + 4y + 6z = 6
3x + 8y + 7z = 15
5x + 7y + 21z = 24
(3.22)

まず, いちばん上の式を変形すると $x = 3 \text{ i } 2y \text{ i } 3z$. これを二番目と三番目の式に代入すると

2y i 2z = 6
i 3y + 6z = 9
(3.23)

上側の式より $y = 3 + z$. これを下側の式に代入すると $z = 6$ となります. これまでの部分を前進消去といいます. つぎに $z = 6$ を $y = 3 + z$ に代入して $y = 9$. そしてこれらを $x = 3 \text{ i } 2y \text{ i } 3z$ に代入すると $x = \text{ i } 33$ となります. この計算を後退代入と呼びます. これをガウスの消去法といいます. 上の書き方では一般的でないので, 行列の形を用いて計算を行ってみます. まず, 解くべき式を行列表示すると

0 2 4 6 1 8 9 8 9
@ 3 8 7 A x = 15
5 7 21 : y ; 24 ;
(3.24)

上式の左辺の行列を係数行列と呼びます。さて、まず1行目を2で割ると

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 18 & 9 & 8 & 9 \\ @ & 3 & 8 & 7 & A & y & = & 15 \\ & 5 & 7 & 21 & : & z & ; & 24 \end{array} \quad (3.25)$$

つぎに、1行目を3倍して2行目から引くと

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 18 & 9 & 8 & 9 \\ @ & 0 & 2 & i2 & A & y & = & 6 \\ & 5 & 7 & 21 & : & z & ; & 24 \end{array} \quad (3.26)$$

さらに、1行目を5倍して3行目から引くと

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 18 & 9 & 8 & 9 \\ @ & 0 & 2 & i2 & A & y & = & 6 \\ & 0 & i3 & 6 & : & z & ; & 9 \end{array} \quad (3.27)$$

つぎは、2行目を2で割る

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 18 & 9 & 8 & 9 \\ @ & 0 & 1 & i1 & A & y & = & 3 \\ & 0 & i3 & 6 & : & z & ; & 9 \end{array} \quad (3.28)$$

そして2行目をi3倍して3行目から引くと

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 18 & 9 & 8 & 9 \\ @ & 0 & 1 & i1 & A & y & = & 3 \\ & 0 & 0 & 3 & : & z & ; & 18 \end{array} \quad (3.29)$$

3行目を3で割ることでzが求まります。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 18 & 9 & 8 & 9 \\ @ & 0 & 1 & i1 & A & y & = & 3 \\ & 0 & 0 & 1 & : & z & ; & 6 \end{array} \quad (3.30)$$

以上の計算が前進消去です。以下、後退代入を行うことによって答えが求まります。それでは実際に(3.21)式を解いてみることにします。 T_1 、 T_6 はすでに温度が与えられているので未知数ではありません。そこでこれらをマトリックスから除きます。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & i2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_1 & 9 & 8 & 100 \\ @ & 0 & 1 & i2 & 1 & 0 & 0 & 0 & T_2 & = & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & i2 & 1 & 0 & 0 & T_3 & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & i2 & 1 & 0 & T_4 & & 0 \\ & & & & & & & & T_5 & & 0 \\ & & & & & & & & T_6 & & 0 \end{array} \quad (3.31)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 9 \\ 8 & 9 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & i & 1 \\ 1 & 1 & i & 2 \\ 0 & 1 & i & 2 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & i & 1 \\ 1 & 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i & 2 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

[illegible]

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i\frac{\omega/2}{\omega} \\ i\frac{\omega/4}{\omega} \\ i\frac{\omega/2}{\omega} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ \frac{100}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \textcircled{\text{0}} & \textcircled{\text{1}} & \textcircled{\text{2}} & \textcircled{\text{3}} & \textcircled{\text{4}} & \textcircled{\text{5}} \\ \textcircled{\text{0}} & 1 & i\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \textcircled{\text{1}} & 0 & 1 & i\frac{2}{3} & 0 & 9 & 8 \\ \textcircled{\text{2}} & 0 & 0 & 1 & i\frac{3}{4} & T_2 & 50 \\ \textcircled{\text{3}} & 0 & 0 & 1 & i\frac{4}{5} & T_3 & \frac{100}{3} \\ \textcircled{\text{4}} & 0 & 0 & 1 & i\frac{5}{6} & T_4 & \frac{300}{12} \\ \textcircled{\text{5}} & 0 & 0 & 1 & i\frac{6}{7} & T_5 & 0 \end{array} = \begin{array}{c} 9 \\ 8 \\ 50 \\ \frac{100}{3} \\ \frac{300}{12} \\ 0 \end{array} \quad (3.37)$$

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & i & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 8 \\ @ & 0 & 1 & i & \frac{2}{3} & 0 & \infty & 9 \\ & 0 & 0 & 1 & i & \frac{3}{4} & \infty & 8 \\ & 0 & 0 & 0 & i & \frac{5}{4} & \infty & 9 \end{array} = \begin{array}{cccccccc} 50 & 9 \\ 100 & \infty \\ 3 & \\ 300 & \\ 12 & \\ 300 & \\ 12 & \end{array} \quad (3.38)$$

4行目を $i \frac{5}{4}$ で割ることで T_5 が求まります.

$$T_5 = 20 \quad (3.39)$$

以下, 後退代入によって

$$T_4 = 40; \quad T_3 = 60; \quad T_2 = 80 \quad (3.40)$$

この方法を応用する例は数多くあるので, 確実にマスターして下さい. 以上の過程で分かるように, ガウスの消去法は左辺の係数行列を単位行列にするものなのです. さて実際にプログラムで表すと以下ようになります. 配列 **A** が係数行列で **B** が右辺ベクトルです. 熱伝導の場合, 係数行列は行列の対角線の部分 (これを対角成分といいます) とその両側に 1 個ずつの 3 個の成分しかないのでこれだけを記憶すればいいことになります (3 重対角行列と呼びます). まず各行を対角成分で割る作業が行われます. そして右辺ベクトルを対角成分で割ります. つぎに, その 1 つ下の行から上の行を引きます. これを行列の行数分繰り返してやることによって対角成分が 1 になります. 以上が前進消去です. あとは下から順に後退代入を行うことで解が求まります. ガウスの消去法は数値計算の本にプログラムが載っていますが, そのようなものを使うときも必ず簡単な行列についてプログラムの通りに手で計算を行ってみて下さい. そうすることで本当に理解できるのです.

```

C      ////////////////////////////////////////////////////
C      // GAUSS ELIMINATION METHOD //
C      ////////////////////////////////////////////////////
C      SUBROUTINE GAUSS(A,B,N)
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C      DIMENSION A(N,N),B(N)
C      WRITE(*,*)'/// Gauss Elimination Method ///'
C      NT=N-1
C      DO 130 K=1,NT
C          KT=K+1
C          DO 131 J=KT,N
C              A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)
C          131 CONTINUE
C              B(K)=B(K)/A(K,K)
C          DO 132 I=KT,N
C          DO 133 J=KT,N
C              A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)      * A(K,J)
C          133 CONTINUE
C              B(I)=B(I)-A(I,K)      * B(K)
C          132 CONTINUE
C          130 CONTINUE
C              B(N)=B(N)/A(N,N)
C          DO 134 K=1,NT
C              L=N-K
C              LT=L+1
C              DO 134 J=LT,N
C                  B(L)=B(L)-A(L,J)      * B(J)
C              134 CONTINUE
C              RETURN
C              END
C      *****
C      ** GAUSS ELIMINATION METHOD*
C      *****
C      SUBROUTINE GAUSS(A,B,N)
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C      DIMENSION A(50,3),B(50)
C      DO 100 K=1,N
C          A(K,3)=A(K,3)/A(K,2)
C          B(K)=B(K)/A(K,2)
C          IF(K.EQ.N) GO TO 100
C          A(K+1,2)=A(K+1,2)-A(K,3)      * A(K+1,1)
C          B(K+1)=B(K+1)-B(K)      * A(K+1,1)
C      100 CONTINUE
C      DO 110 KK=2,N
C          K=N+1-KK
C      110 B(K)=B(K)-B(K+1)      * A(K,3)
C      RETURN
C      END

```

係数行列の上三角成分を対角で割る

右辺ベクトルを対角で割る

次の行の下三角の消去

下三角の消去に伴う右辺ベクトルの引き算

行列の最下列の未知数が決定された

後退代入

係数行列が対角とその両側しかない，三重対角行列の場合．二次精度の差分法で用いられる．

係数行列の上三角成分を対角で割る
右辺ベクトルを対角で割る

次の行の下三角の消去
下三角の消去に伴う右辺ベクトルの引き算

後退代入

問題 3.6 前頁のプログラムを作成し、簡単な行列の計算を行って見よ.

F コーヒーブレイク

Ⅱ ヨハン・カルル・フリートリヒ・ガウス (Johann Karl Friedrich Gauss, 1777 » 1855)

3



「超時代的な数学者」とたたえられ「数学の王様」とあがめられるガウスは 1777 年 4 月 30 日、ドイツのブラウンシュヴァイクという町にれんが職人の息子として生まれました。父はもちろんのこと、本人も大きくなったら跡を継いでれんがを積み重ねる仕事をするつもりでいたようです。しかし、この少年は小学校にはいるとともに先生を驚かせていたようです。

二年生 (8 歳) のあるとき 1 から 100 までの整数の総和をいともたやすく計算したのです。もちろん $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$ をちまちまと計算したのでは無く、皆さんが高校で数列を習ったときに覚えた方法を自力であっと言う間に考えだして計算したのです。ガウスは数学だけにとどまらずあらゆるものに興味を示したようで高校時代には古典文学、ことに古い言語に引きつけられていたようで言語学を専攻しようかと考えるほどでした。そしてときは流れてゲッチンゲン大学へ入学したときの話ですが、このとき故郷のブラウンシュヴァイクからゲッチンゲンまでの 120 km の道のりを歩いたそうです。またその後も帰省するときはいつも歩いたようで、歩くのがよほど好きだったようです。3 年間ゲッチンゲン大学で学んだあと、ヘルムステット大学で学位論文を発表しました。これは現代の数学では「代数学の基本定理」と呼ばれているものです。この論文によって 19 世紀の数学界に新しい風が吹き込ま

れたのです。この後ガウスは様々な研究に取り組みました。天文学に興味を示し天文台長となっていますし、このとき「測地学」を追求し観測した値の精度を明確にするために「誤差論」を樹立し、皆さんがご存じの「最小自乗法」を完成させました。また、この他にも「磁気」、「電気」、「光学」などの領域にも重要な貢献をしています。もちろん数学においても、空前といってよいほどに、あらゆる分野にまたがったものをたくさん完成しています。しかし、ガウス自身はほとんど公表しておらず日記などに書き残したりしています。この日記は 19 ページのささやかな小冊子なのですがこの中には 146 の研究成果が簡潔に記録されており、数学史全体の中で最も貴重な記録文書といえるものでしょう。この日記は彼の死後 43 年たってから孫の所に保管されているものが発見されました。

μ

二次元定常熱伝導 3.6

本節では、二次元問題の解析法について説明します。二次元の場合も一次元と同様に解析することができます。しかし、二次元問題に対してガウスの消去法で一度に解こうとすると、係数行列が非常に大きくなるため記憶容量が莫大なものとなります。ガウスの消去法のように一度に行列の反転を行うものを直接法といいます。直接法は大きな記憶容量を必要とするため、多次元の問題に対しては有効ではありません。一般に、多次元の問題を解析する場合、行列の反転には反復法と呼ばれる方法が用いられます。ここでは反復法による解析法について説明します。まず簡単に説明するために、一次元の場合について考えます。

$$T_{i+1} - T_i - 2T_i + T_{i-1} = 0 \quad (3.41)$$

本来だとこの式から T_i を求めなければいけないので

$$T_i = \frac{1}{2}(T_{i+1} + T_{i-1}) \quad (3.42)$$

まず 1 回目は上式の右辺には適当な値を代入します。それを $T_i^{(2)}$ とすると

$$T_i^{(2)} = \frac{1}{2}(T_{i+1}^{(1)} + T_{i-1}^{(1)}) \quad (3.43)$$

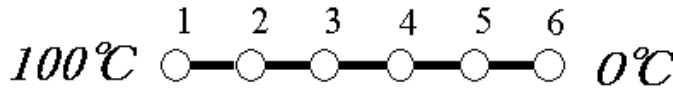


Fig. 3.6 Discretization of bar

上式を計算領域の内点に適用します。そして

$$" = \frac{S}{N} \sum_{i=1}^{N-1} (T_i^{(2)} - T_i^{(1)})^2 \quad (3.44)$$

を計算します。" が 0 ならばそれが正解になります（方程式が満足されたから）。しかし、多くの場合 0 にはなりませんので 0 になるまで繰り返し計算を行うのです。つまり、2 回目の値を (3.42) 式の右辺に代入し 3 回目の答えを求めます。そして誤差が 0 でなければ、さらに 3 回目の値を右辺に代入し 4 回目の答えを求めます。この手順を " が 0 になるまで繰り返してやればよいのです。実際には 0 になることはないので（打ち切り誤差や丸め誤差があるから）ある小さな数より小さくなったとき計算を終了します。これで定常状態の温度が求まるわけです。この方法をヤコビ（Jacobi）法、あるいはリチャードソン（Richardson）法といいます。具体的に計算をしてみましょう（Jacobi はヤコビ、Jordan はヨルダンと書かれますが、これは英語で発音するときはジャコビ、ジョーダンと読まれることに注意しましょう）。1, 6 は境界なので 2 ≫ 5 まで計算します。第 1 回目の値として 0 を用いると、2 回目の値は

$$T_2^{(2)} = 50; \quad T_3^{(2)} = 0; \quad T_4^{(2)} = 0; \quad T_5^{(2)} = 0 \quad (3.45)$$

第 3 回目以降の値は

$$\begin{aligned} T_2^{(3)} &= 50; \quad T_3^{(3)} = 25; \quad T_4^{(3)} = 0; \quad T_5^{(3)} = 0 \\ T_2^{(4)} &= 62.5; \quad T_3^{(4)} = 25; \quad T_4^{(4)} = 12.5; \quad T_5^{(4)} = 0 \\ T_2^{(5)} &= 62.5; \quad T_3^{(5)} = 37.5; \quad T_4^{(5)} = 12.5; \quad T_5^{(5)} = 6.25 \end{aligned}$$

この方法をよく考えてみると、たとえば $i = 4$ の点の $k + 1$ 回目の計算をする場合

$$T_4^{(k+1)} = \frac{1}{2}(T_3^{(k)} + T_5^{(k)}) \quad (3.46)$$

で計算を行っていますが、 T_3 はすでに $k + 1$ 回目の値があるのでそれを用いることにすると、反復計算の式は以下ようになります。

$$T_i^{(k+1)} = \frac{1}{2}(T_{i-1}^{(k+1)} + T_{i+1}^{(k)}) \quad (3.47)$$

この方法で同じ問題を解いてみると

$$2 \text{ 回目 } T_2^{(2)} = 50; \quad T_3^{(2)} = 25; \quad T_4^{(2)} = 12.5; \quad T_5^{(2)} = 6.25$$

$$3 \text{ 回目 } T_2^{(3)} = 62.5; \quad T_3^{(3)} = 37.5; \quad T_4^{(3)} = 21.875; \quad T_5^{(3)} = 10.9375$$

となり、ヤコビ法より計算の進み具合が速いことが分かります。したがって、収束までの計算回数が少なくなります。この方法をガウス・ザイデル (Gauss-Seidel) 法あるいはリープマン (Liepman) 法といいます。さて、(3.47) 式はさらに収束を改良することが可能です。収束していなければ左辺と右辺は等しくなく、収束していれば等しいといえます。したがって、 $k+1$ 回目の値と k 回目の値を (3.47) 式の右辺に加えてやれば、さらに計算が加速されそうです。この方法を具体的に書くと、まず (3.47) 式での仮の (tentative) 温度 $T_i^{(k+1)}$ を求めます。そして

$$R = T_i^{(k+1)} - T_i^{(k)} \quad (3.48)$$

で残差を計算します。N は計算した点の個数です。そして

$$T_i^{(k+1)} = T_i^{(k)} + \omega R \quad (3.49)$$

で $k+1$ 回目の温度を計算するのです。この方法はリープマン法を加速したので、加速リープマン法、あるいは SOR (Successive-Over-Relaxation) 法 (逐次過緩和法) と呼ばれます。 ω は緩和係数で $1 \ll \omega < 2$ の値を用います。緩和係数は大きな方が収束が速いのですが、ある値よりも大きくなるとかえって収束が悪くなります。しかもある値は事前に分からないので、計算を何通りか行って見つけるしかありません。

つぎに二次元の場合について説明します。支配方程式は

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3.50)$$

差分方程式に直すと

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (3.51)$$

$T_{i,j}$ についてまとめると

$$\omega \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right) T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (3.52)$$

一次元の場合と同様に SOR 法により

$$T_{i,j}^{(k+1)} = T_{i,j}^{(k)} + \omega \left(T_{i,j}^{(k+1)} - T_{i,j}^{(k)} \right) \quad (3.53)$$

上式の T_i^{k+1} を (3.52) 式で計算します。一回目の反復値 ($k = 1$) は適当な初期値を与えて用います。これを繰り返して、残差が小さくなるまで行います。

以上、熱伝導方程式の定常、非定常解析について説明を行いました。これで差分法の基礎的なことが理解できたかと思います。あとは応用問題を解けばよいのですが、基本的に熱伝導と同じ方法で解くことができます。手順が増えるだけで特に難しい理論はいらないのです。数値計算をマスターするにはとにかく反復練習が必要です！

問題 3.7 境界条件を変えてみて、熱伝導問題を解いて見よ。また、ヤコビ法、リチャードソン法、SOR法でプログラムを作成し、実行時間の差を確認せよ。

陰解法 3.7

さて、これまでに説明した方法で熱伝導問題は完璧になったと思います。ところで非定常解析を行う場合に陽解法を用いると、格子点が増加すると時間刻みが非常に小さくなり、計算回数が大幅に増加します。それに対し、陰解法 (implicit method) を用いると時間刻みが大きくとれます。いま、一次元非定常熱伝導を考えます。空間微分項を $n + 1$ 時で評価すると、差分方程式は以下のようになります。

$$T_i^{n+1} - T_i^n$$

これで k 回目と $k+1$ 回目の差が収束条件より小さくなったら、それが $n+1$ ステップの温度となります。 $T_i^{(k+1)}$ は (3.58) 式で計算します。時間添字と反復回数の添字に十分注意して下さい。二次元、三次元の場合も同様に解析できます。定常解析と異なり、収束した時点で $n+1$ 時刻の温度が求まることに注意して下さい。この部分をプログラムで表すと、以下のように書くことができます。

何度も注意しますが、以下のプログラム中の 500 の DO ループの反復は、SOR 法の反復であり、これが終了して初めて $n+1$ 時刻の温度が求まるわけです。陽解法では一回だけ内部の点の計算をすれば $n+1$ 時刻の温度が求まったのに対し、陰解法では何回も反復計算を行って次の時刻の温度が求まるのです。

```

      DO 100 I=2,NXM1
C
C 100    TO(I)=T(I)
C
C      *** COEFFICIENT FOR SOR METHOD ***
C
C      COEF=1.D0+2.D0 * DT/DX** 2
C
C      ***** SOR ITERATION LOOP*****
C
C      DO 500 LOOP=1,ITER
C
C      ERR=0.D0
C
C      DO 110 I=2,NXM1
C
C      DIFF=(T(I+1)+T(I-1))/DX      ** 2
C
C      DU=(TO(I)+DT * DIFF)/COEF-T(I)
C
C      ERR=ERR+DU*DU
C
C      T(I)=T(I)+OMEGA * DU
C
C 110 CONTINUE
C
C      CALL BOUND
C
C      ERR=DSQRT(ERR/DFLOAT(NX-2))
C      IF(ERR.LT.EPS2) GOTO 99
C
C 500 CONTINUE
C
C 99 CONTINUE
C
C
C      RETURN
C      END

```

さて、陰解法の場合は陽解法のように時間の制限があるのでしょうか？ それを調べるた

めに、陽解法の時と同様にフォン・ノイマンの安定解析を行います。途中省略しますが、陽解法と同様に波を代入すると増幅率は以下のように表されます（各自確かめること）。

$$g = \frac{1}{1 + 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\Delta x}{2}} \quad (3.59)$$

上式の分母は決して1より小さくならないので、時間間隔と空間間隔の間がどのような関係であろうと安定していることを示しています。すなわち、陰解法は無条件安定な解法なのです。したがって、陰解法は陽解法に比べ非常に大きな時間間隔を取ることができます（線形方程式に限る）。

問題 3.8 非定常問題の陰解法について、SOR法で解析するプログラムを一次元・二次元について作成せよ。

4

非圧縮粘性流れの支配方程式

Governing equation for incompressible viscous flow

はじめに | 4.1

ここまでの勉強で基本的な差分法というものが分かったと思います。ここからは実際に流れを数値的に解く数値流体力学（Computational Fluid Dynamics, CFD）に入っていきます。前章までに対象とした物理現象は、熱伝導を扱いました。これは、この問題が扱いやすいことと、条件によっては厳密解が得られるということで精度を確認するのに都合が良かったためでした。ここからは、実際に流れを解析するための手順に取りかかることにします。そのためには、流れを表す方程式が分かっておく必要があります。ここでは、非圧縮流れの支配方程式について説明を行います。

ベクトルとテンソル 4.2

流体力学にはベクトル演算が多く登場します。なぜなら、流れには方向と大きさがあるからです。これらの記号には見慣れないものが多いため、難しいものだと思います。しかし、決して難しいものではなく、高校生程度の知識と根性があれば簡単に克服できます。差分法による流れ解析の前に、ベクトルについて、簡単に復習しておきましょう。

われわれが計算しようとする空間や平面を場と呼びます。それらの場にはベクトル場とスカラー場があります。いま三次元空間を考えた場合、空間内の任意の点 $P(x; y; z)$ にベクトル A が存在するとき、この空間をベクトル場と呼びます。また、各点に数値がくっついていて、この空間をスカラー場と呼びます。したがって、空間内に関数 $f(x; y; z)$ が与えられているときはスカラー場となります。いま、関数が微分可能であるとし、すなわち $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ が存在するということです ($\frac{\partial f}{\partial x}$ と書くのが面倒なので f_x と書くことにします)。 f_x , f_y , f_z は各方向の変化率、すなわち勾配です。これをベクトル演算子で書くと $\text{grad} f$ と書きます (グラディエントと呼びます)。 $\text{grad} f = (f_x; f_y; f_z)$ ですからベクトル場となります (gradient を辞書で調べてみるとよいでしょう)。

ベクトルというと、当然内積と外積が頭に浮かびます。いま、 $a = (a_1; a_2; a_3)$, $b = (b_1; b_2; b_3)$ とすると、内積は次のように表されます。

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (4.1)$$

また $a \cdot b = |a||b|\cos\mu$ で記憶されている方も多いことでしょう。このことから、内積が 0 ということは二つのベクトルが直交していることを表すことになります。

これに対し、外積は次のように表されます。

$$a \times b = \begin{vmatrix} 0 & a_2 b_3 - a_3 b_2 & 1 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 & a_1 b_2 - a_2 b_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

一般的には基底ベクトルを用いて、次のように書かれます。

$$a \times b = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

これは内積と同様に、三角関数を用いて以下のように表されます。

$$|a \times b| = |a||b|\sin\mu \quad (4.4)$$

したがって、外積が $\mathbf{0}$ ということは二つのベクトルが平行であることを表していますし、意味をよく考えると、外積は二つのベクトルで表される平行四辺形の面積を表すことになります（図を書いてみて考えてみてください）。

問題 4.1 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$ を証明せよ。

ベクトル演算子にはほかに div , rot をよく使います。 $\mathbf{A} = (a; b; c)$ とするとベクトルの発散（ダイバージェント）は

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \quad (4.5)$$

また、ベクトルの回転（ローテーション）は

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

と表されます。流体力学では、次の関係をよく使いますので覚えておいて下さい（証明は簡単なので、各自確認して下さい）。

$$\text{rot grad } f = \mathbf{0}; \quad \text{div grad } f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \quad (4.7)$$

上式の右辺の演算は ∇f と表すこともあります。この演算子はラプラシアンと呼ばれます。さらに、以下の公式を覚えておくと便利です。

$$\text{grad}(fg) = g \text{ grad } f + f \text{ grad } g \quad (4.8)$$

$$\text{div}(f \mathbf{A}) = \text{grad } f \cdot \mathbf{A} + f \text{ div } \mathbf{A} \quad (4.9)$$

$$\text{rot}(f \mathbf{A}) = \text{grad } f \times \mathbf{A} + f \text{ rot } \mathbf{A} \quad (4.10)$$

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B} \quad (4.11)$$

このほかに、ヤコビの関数行列をよく用います。いま関数 $f(x; y)$, $g(x; y)$ があるとき

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

を **Jacobian** といいます。上式は次のような表現で表すことが多いです。

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(f; g)}{\partial(x; y)} \quad (4.13)$$

さて、ベクトルを基底ベクトルで表すと、以下のように表されます。

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}_i \quad (4.14)$$

上のように、総和記号の $\sum$ を書かないで表示します。これをアインシュタインの総和規約といいます。いま、二つのベクトル $\mathbf{y}$ と $\mathbf{x}$ がある時、 $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ となるような $\mathbf{T}$ を二階のテンソル (tensor) と呼びます。三次元空間の場合、ベクトルは三成分を持ちますので $\mathbf{T}$ は 3×3 の行列と同じ成分を持つことになります。一般的には添字を用い $y_i = T_{ij} x_j$ という表記を用います。

問題 4.2 $f = (x^2 y^2; y z^3; z^3 x)$ で与えられるとき、 $\text{grad} f$, $\text{div} f$ を求めよ。

問題 4.3 $f = (yz; z^2 x^2; x^3 y^3)$ の場合の $\text{rot} f$ を求めよ。

問題 4.4 $f = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ の場合の $\nabla^2 f$ を求めよ。

支配方程式 4.3

いま二次元の問題を考えます。対象とする流体をニュートン流体であるとする、支配方程式は以下に示すナビエ・ストークス方程式と連続の式で表されます。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.17)$$

(4.15), (4.16) 式は運動方程式であり、ニュートンの第二法則から得られたものです。また (4.17) 式は質量保存の法則を表しています (各自、流体力学の教科書で確認、復習して下さい)。さて、上式は有次元型式で表されているため、相似法則が利用できません (有次元とは速度や圧力などの物理量が単位を持っていることです)。そこで相似法則が利用できるように次式を用いて無次元化します。

$$x^* = \frac{x}{L}; \quad y^* = \frac{y}{L}; \quad u^* = \frac{u}{U_1}; \quad v^* = \frac{v}{U_1}; \quad t^* = \frac{U_1 t}{L}; \quad p^* = \frac{p}{\frac{1}{2} \rho U_1^2} \quad (4.18)$$

上式の関係を用いて支配方程式を無次元化します．たとえば

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \quad * \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{1}{L} \quad (4.19)$$

のように行います．そうするとナビエ・ストークス方程式と連続の式は以下のように変換されます．

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + u^{\alpha} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + v^{\alpha} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = i \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + u^{\alpha} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + v^{\alpha} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = i \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.22)$$

上式において Re はレイノルズ数です．以下，アスタリスクをとって表現することにします．(4.20)，(4.21) 式をベクトル形式で表すと次式のようになります．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + u^{\alpha} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} i + u^{\alpha} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + v^{\alpha} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} j \\ = i \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} i + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} j + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} i + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} j \end{aligned} \quad (4.23)$$

ベクトル演算子を用いて表現すると

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = \text{div } \bar{U} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} i + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} j = \text{grad } \bar{p} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} = r^2 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} u^{\alpha} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + v^{\alpha} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} i + u^{\alpha} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + v^{\alpha} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} j = \bar{U} \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} i + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} j \right) \\ = (\bar{U} \cdot \bar{r}) \bar{U} \end{aligned} \quad (4.27)$$

結局，次のように表されます．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} + (\bar{U} \cdot \bar{r}) \bar{U} &= i \bar{r} \cdot \bar{p} + \frac{1}{Re} r^2 \bar{U} \quad \text{or} \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} + (\bar{U} \cdot \text{grad}) \bar{U} &= i \text{grad } \bar{p} + \frac{1}{Re} r^2 \bar{U} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (4.29)$$

ここで $\mathbf{U}$ は速度ベクトル $\mathbf{U} = u_i + v_j$ です。これらの式の未知数は流速二成分と圧力の三個です。これはテンソルを用いて表すと以下のように表されます。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.30)$$

二次元の解析ではこのまま解かずに渦度と流れ関数を未知数として解析する方法がよく用いられます。ここではその手法を用いることとします（なぜかという、非圧縮流れの解析では圧力を解析するのが大変なのです。そこでこれを避けるため圧力を消去した式を用いることが多いのです）。

いま、流れ関数を $\tilde{A}$ とすると（プサイと呼びます）

$$u = \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \quad (4.31)$$

上式を連続の式に代入すると

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.32)$$

となり、連続の式を満足することが分かります。また渦度は

$$\omega^3 = \operatorname{rot} \mathbf{U} \quad (4.33)$$

で定義されます（ツェーターあるいはジーターと呼びます）。渦度は右回りと左回りの定義の仕方で符号が変わるので注意して下さい。したがってベクトルの公式より、

$$\operatorname{div} \omega^3 = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{U}) = 0 \quad (4.34)$$

となります。さて (4.28) 式の回転をとると

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right) + \operatorname{rot}[(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}] = -\operatorname{rot}(\nabla p) + \frac{1}{\operatorname{Re}} \operatorname{rot}(\nabla^2 \mathbf{U}) \quad (4.35)$$

上式の左辺第2項はちょっとした計算をすると、以下のように変形されます（この計算が出来ればあなたも立派な大学生といえます）。

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}[(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}] &= (\mathbf{U} \cdot \nabla)(\operatorname{rot} \mathbf{U}) - [(\operatorname{rot} \mathbf{U}) \cdot \nabla] \mathbf{U} \\ &= (\mathbf{U} \cdot \nabla) \omega^3 - (\omega^3 \cdot \nabla) \mathbf{U} \end{aligned} \quad (4.36)$$

したがってナビエ・ストークス方程式は以下のように変形されます。

$$\frac{\partial \omega^3}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \omega^3 = (\omega^3 \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \nabla^2 \omega^3 \quad (4.37)$$

上式は渦度輸送方程式とよばれるもので、二次元の計算ではよく用いられるものです。二次元の場合は以下のように簡単な形となります。

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial t^3} + (U \nabla \text{grad})^3 = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^3 \quad (4.38)$$

(4.38) 式において左辺第 1 項は時間項、第 2 項は対流項、右辺が粘性項と呼ばれます。また (4.31) 式を (4.33) 式に代入すると、次のような流れ関数のポアソン方程式が得られます。

$$\frac{\partial^3 \tilde{\psi}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \tilde{\psi}}{\partial y^3} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^3 \quad (4.39)$$

さて、(4.38) 式と (4.39) 式を差分解析することで二次元の粘性流れを求めることができます。(4.38) 式は二次元非定常熱伝導を参考にすれば容易にプログラムができ、(4.39) 式は二次元定常熱伝導を参考にすればいいのです。そして具体的な解析方法は、どちらでもよいのですが、まず流れ関数について解きます。そしてそれから流速を計算し、渦度輸送方程式を解析します。以下、これを繰り返していくことで非定常な流れが解析できます。

さて、(4.38) 式は一般にヤコビの関数行列を用いて以下のように表されることが多いようです（こう書くと難しく見えるのでかっこよく見せるためにこのように書くことが多いのです）。

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^3 \quad (4.40)$$

上式を展開すると

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial y \partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \right) \quad (4.41)$$

以上に示した流れ関数のポアソン方程式と渦度輸送方程式が支配方程式となります。

F コーヒーブレイク

¶ アンリ・ナビエ (Claude Louis Marie Henri Navier, 1785 » 1836)

3



19世紀の初頭は、1760年ごろからイギリスにおこった産業革命、機械文明の波がヨーロッパにもおよびはじめ、それにともない工業に役立つ科学が要望された時代であり、またフランスではナポレオンによるヨーロッパの征服と、その失脚の時代でもありました。

この時代ナポレオンの学者好みを反映してか、フランスには Laplace, Lagrange, Fourier, Cauchy といった大数学者達が活躍していました。また当時、本格的大規模構造物としてのつり橋の理論がようやく打ち立てられようとしていました。今日、粘性流体の力学方程式の創始者の一人として最初に名を連ねる Navier (1785» 1836) (ナビエ) はこうした時代の一流の土木橋梁技術者でした。

ところが、Navier がせっかく建設したご自慢の橋が洪水のために橋脚をすくわれ、流出してしまったことがありました。このことが契機となって Navier は粘性を考慮した流体の力学の研究を行い、論文をフランス学士院に提出しました (1822)。しかし、不幸なことにこの論文は世に知られることなく歳月が流れ、1845年にイギリスの物理・応用数学者である Stokes により粘性流体の運動方程式がナビエと独立に導かれ、この時以来粘性流体の力学の歴史が始まったのでした。しかし、この方程式 (ナビエ・ストークス方程式) の解は極めて限られた条件のもとでしか求められず、実際上の問題の解決にはさほど貢献はしませんでした。ナビエ・ストークスの解が簡単に得られないのは、この方程式の非線形性のためで、これは単なる数学上のテクニックだけでは解決できないものであり、流体现象に対する物理的考察をもとにして

初めて可能となりました。それには 20 世紀初頭 (1904) の Prandtl の出現を待たなければなりません。彼は境界層という概念を持ち込み、流れを物体表面の薄い粘性の作用の強い領域と、それ以外の完全流体の領域とに分けて問題を見事に解決しました。これは 1903 年のライト兄弟の人類初飛行の翌年であり、これ以後、航空機の発達とともに境界層理論を中心とする華々しい流体力学の発展の時代に入っていきます。

μ

5

非圧縮粘性流れの解析

Analysis of incompressible viscous flow

はじめに | 5.1

流れを計算によって求める試みは、1910年のリチャードソンによるものが最初です。彼は円形のコロシウムに 64,000人を集め、一人一人を差分格子点としてそれぞれ計算を行わせることで、天気予報が可能であると考えました。このときの計算は非定常熱伝導の解析でしたが、試計算において、結果は残念ながら発散し、彼の計画は実現しませんでした。以来、数多くの数学者達が試みましたが良い結果はなかなか現れませんでした。信頼性の高い解析は、1953年の川口による円柱周りの流れを解析したものが最初でした。彼はレイノルズ数 40 の流れを 21×11 の格子点で計算を行い実験値と良く一致する解析結果を出しています。ただし、この計算は手回し計算機を使用し、週に 20 時間の計算を 1 年半の歳月をかけて得られたものでした。その後、電子計算機が発達し、1966年にはフロムらによって物体後流にできるカルマン渦が計算機によって初めて捉えられました。現在ではコンピュータも発達し、ノートパソコンでさえ、数年前のスーパーコンピュータ並

の能力を持っており、多くの研究がなされています。みなさんも早く流れの計算ができるようになるように頑張ってください。

陽解法による離散化 5.2

さて、前節で示された支配方程式を差分法で解析するために (4.39) 式と (4.41) 式を差分方程式に書き直します。まず、流れ関数のポアソン方程式は以下のように変換されます。

$$\frac{\tilde{A}_{i+1;j} - 2\tilde{A}_{i;j} + \tilde{A}_{i-1;j}}{\phi x^2} + \frac{\tilde{A}_{i;j+1} - 2\tilde{A}_{i;j} + \tilde{A}_{i;j-1}}{\phi y^2} = \tilde{S}_{i;j} \quad (5.1)$$

この式は定常熱伝導のときと同じようにして解きます。 $\tilde{A}_{i;j}$ についてまとめると以下のようになります。

$$\tilde{A}_{i;j} = \frac{\mu \frac{\tilde{A}_{i+1;j} + \tilde{A}_{i-1;j}}{\phi x^2} + \frac{\tilde{A}_{i;j+1} + \tilde{A}_{i;j-1}}{\phi y^2} + \tilde{S}_{i;j}}{\frac{2}{\phi x^2} + \frac{2}{\phi y^2}} \quad (5.2)$$

SOR法で解くと

$$\tilde{A}_{i;j}^{k+1} = \tilde{A}_{i;j}^k + \omega (\tilde{A}_{i;j}^{(k+1)} - \tilde{A}_{i;j}^k) \quad (\tilde{A}_{i;j}^{(k+1)} \text{ は式 (5.2) で計算}) \quad (5.3)$$

上式を収束するまで計算します。収束判定は、普通流れ関数の平均自乗残差が $10^{-3} \gg 10^{-8}$ の値を指定します。キャビティーフローの問題ではあまり反復はありませんので、かなり反復するときはプログラムをチェックしたほうが良いでしょう。

つぎに渦度輸送方程式を離散化すると

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{i+1;j}^{n+1} - \omega_{i;j}^{n+1}}{\phi t} + \frac{\tilde{A}_{i;j+1}^n - \tilde{A}_{i;j-1}^n}{2\phi y} \frac{\omega_{i+1;j}^n - \omega_{i-1;j}^n}{2\phi x} - \frac{\tilde{A}_{i+1;j}^n - \tilde{A}_{i-1;j}^n}{2\phi x} \frac{\omega_{i;j+1}^n - \omega_{i;j-1}^n}{2\phi y} \\ = \frac{1}{\text{Re}} \mu \frac{\omega_{i+1;j}^{3n} - 2\omega_{i;j}^{3n} + \omega_{i-1;j}^{3n}}{\phi x^2} + \frac{\omega_{i;j+1}^{3n} - 2\omega_{i;j}^{3n} + \omega_{i;j-1}^{3n}}{\phi y^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

変形すると

$$\begin{aligned} \omega_{i;j}^{n+1} = \omega_{i;j}^{3n} - \phi t \text{CU} \mu \frac{\omega_{i+1;j}^{3n} - \omega_{i-1;j}^{3n}}{2\phi x} - \phi t \text{CV} \mu \frac{\omega_{i;j+1}^{3n} - \omega_{i;j-1}^{3n}}{2\phi y} \\ + \frac{\phi t}{\text{Re}} \mu \frac{\omega_{i+1;j}^{3n} - 2\omega_{i;j}^{3n} + \omega_{i-1;j}^{3n}}{\phi x^2} + \frac{\omega_{i;j+1}^{3n} - 2\omega_{i;j}^{3n} + \omega_{i;j-1}^{3n}}{\phi y^2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

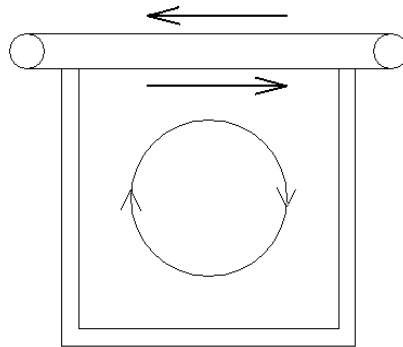


Fig. 5.1 Cavity flow

ただし

$$CU = \frac{\tilde{A}_{i,j+1}^n - \tilde{A}_{i,j-1}^n}{2\phi y}; \quad CV = \frac{\tilde{A}_{i+1,j}^n - \tilde{A}_{i-1,j}^n}{2\phi x} \quad (5.6)$$

(5.5) で新しい³ が求まります。さて、これで二次元の非定常な粘性流れが解析できるので実際に問題を解いてみることにしましょう。計算を行うのは標準問題となっている二次元正方空洞流れ（キャビティーフロー）です。この問題は多くの研究者によって解析されており、いろいろなレイノルズ数に対して結果が得られています。したがって、作成したプログラムが正しいかどうかのチェックに用いると便利です。さらにレイノルズ数が増えたときの流れの状態より、レイノルズ数の意味を理解するのに役立ちます（レイノルズ数は慣性力と粘性力の比です）。

この問題は、四方が壁に囲まれた正方形の空洞の中に水が満たされているときの、上部の壁だけがベルトコンベアで動いている場合、中の水がどのような流れを生じるかという問題です。この問題を解くにあたって、流れ関数と渦度の境界条件を決定しなければなりません。流れ関数の境界条件は、流体の流入流出がないのですべての壁面で 0 を与えます。

つぎに渦度の境界条件について考えます。まず壁が速度 U で動いている場合は添字 w を壁面として

$$U = \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} = \frac{\tilde{A}_{w+1,i} - \tilde{A}_{w-1,i}}{2\phi y} \quad) \quad \tilde{A}_{w-1,i} = 2\tilde{A}_{w+1,i} - 2U\phi y \quad (5.7)$$

この壁面では、 V が 0 であるので、壁面上では流れ関数のポアソン方程式は

$$\nabla^2 \tilde{A}_{w-1,i} = \frac{\tilde{A}_{w-1,i} + \tilde{A}_{w+1,i}}{\phi y^2} = \frac{2\tilde{A}_{w+1,i} + 2U\phi y}{\phi y^2} \quad (5.8)$$

(5.8) に (5.7) を代入すると次式が得られます.

$$^3_w = i \frac{2\tilde{A}_{wi} 1 + 2U\phi y}{\phi y^2} \quad (5.9)$$

動いていない壁面では上式中の速度を 0 とすればよいのです. 計算の手順を以下に示します.

- (1) 計算に必要な定数の設定
- (2) 配列の初期化
- (3) 流れ関数の境界条件を設定
- (4) (5.3) で流れ関数を計算
- (5) 渦度の境界条件を計算
- (6) (5.4) で新しい渦度を計算
- (7) 定常状態の判断
- (8) 結果の出力

あとは必要な時間になるまで 3 » 7 を繰り返せばよいのです. 以下に渦度と流れ関数を用いた流れ関数のプログラムのメイン部分を示しますが, その計算の流れが分かります.

```

C      *****
C      **  VORTICITY TRANSPORT EQUATION AND      **
C      **  POISSON EQUATION FOR STREAM FUNCTION  **
C      **  SOLVED BY FINITE DIFFERENCE METHOD     **
C      **                                           **
C      **  NON-CONSERVATIVE FORM                  **
C      **                                           **
C      **  EXPLICIT TIME MARCHING METHOD          **
C      **                                           **
C      **  CARTESIAN COORDINATE (CAVITY FLOW)     **
C      **                                           **
C      **  THE 2ND ORDER CENTERED SCHEME         **
C      **                                           **
C      **  1988/4/27                               COMPRESSOR **
C      *****
C
C      *****
C      **      MAIN ROUTINE      **
C      *****
C
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C      COMMON /TIMEC/ DT,TIME,NSTEP
C
C      CALL INIT                      初期条件の設定
C
C      CALL CLEAR                    配列の 0 クリア

```

```

C
C
C      ***** EXPLICIT TIME MARCHING LOOP*****
C
C      DO 300 ISTEP=1,NSTEP                      時間進行のループ
C      WRITE(*,*)'TIME=',TIME
C      TIME=TIME+DT
C      CALL STREAM                                流れ関数の計算
C      CALL BOUND                                渦度の境界条件の設定
C      CALL VORT                                  渦度の計算
C      CALL JUDGE(ERRM,ISTEP)                    定常判定
C      IF(ERRM.LT.1.D-6) GOTO 90                  定常になったらループから出る
C
C 300 CONTINUE
C 90 CONTINUE
C
C      CALL OUTPUT(ISTEP)                        結果をファイルに出力
C
C
C      STOP
C      END

```

このようなアルゴリズムで解析を行います。あとの細かな計算や設定は、各サブルーチンで決めてやればよいのです。このように、プログラムを分かり易くまとめることを構造化と言い、このような構造化した書き方をするとプログラムの内容が良く分かります。

さて、実際にキャビティ流れ問題を解いて行くわけですが、解析結果を評価する場合には定常解を問題にすることが多いのです。定常解を求めるということは時間的に変化しなくなった解を求めるということです。ここで、 $\left(\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i,j}^n \right)$ が小さくなったものを定常解と見なすことにします（平均自乗残差と呼びます）。 i, j は各座標軸方向の格子点数を表します。これが $10^{-5} \gg 10^{-8}$ 以下になったときに定常と見なすことが多いようですが、問題によって変えていく必要があります。

70 5 05 4 . 2

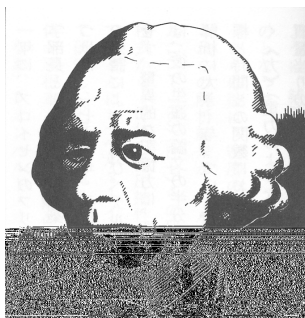
Table 5.2 $y = 0:5$ での y 軸に垂直な断面の速度 v の値

x	100	400	1000	3200	5000	7500	10000
1:0000	1:00000	100000	100000	100000	100000	100000	100000
0:9688	0:05906	0:12146	0:21388	0:39017	0:49774	0:53858	0:54302
0:9609	0:07391	0:15663	0:27669	0:47425	0:55069	0:55216	0:52987
0:9531	0:08864	0:19254	0:33714	0:52357	0:55408	0:52347	0:49099
0:9453	0:10313	0:22847	0:39188	0:54053	0:52876	0:48590	0:45863
0:9063	0:16914	0:23827	0:51550	0:44307	0:41442	0:41050	0:41496
0:8594	0:22445	0:44993	0:42665	0:37401	0:36214	0:36213	0:36737
0:8047	0:24533	0:38598	0:31966	0:31184	0:30018	0:30448	0:30719
0:5000	0:05454	005186	002526	000999	000945	000824	000831
0:2344	0:17527	030174	032235	028188	027280	027348	027224
0:2266	0:17507	030203	033075	029030	028066	028117	028003
0:1563	0:16077	028124	037095	037119	035368	035060	035070
0:0938	0:12317	022965	032627	042768	042951	041824	041487
0:0781	0:10890	020920	030353	041906	043648	043564	043124
0:0703	0:10091	019713	029012	040917	043329	044030	043733
0:0625	0:09233	018360	027485	039560	042447	043979	043983
0:0000	0:00000	000000	000000	000000	000000	000000	000000

F コーヒーブレイク

¶ レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler, 1707 » 1783)

3



”オイラーは、人が呼吸するように、鷲が空中に身を支えるように、
はた目には何の苦勞もなく計算をしていた”

この言葉は、当時、解析学の権化と呼ばれ、史上最も多産な数学者 L. オイラーを称した言葉です。彼はこの言葉のとおり、比類ない数学的力量を持ち合わせた希有の大天才だったのです。流体力学や数学を学んだ皆さんも名前だけでなく、彼の偉大な功績（オイラーの公式、オイラー方程式等 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の数々を御存知だと思います。

彼は、1704年4月15日スイスのバーゼルに生まれた。父親のパウルも優れた数学者でしたが、息子レオンハルトには牧師になることを望んでいました。しかし、あの有名なベルヌーイ家の人々が息子さんは牧師ではなく、大数学者になるだろうと説いたので、父親パウルは仕方なくあきらめたと言われています。こうして、L. オイラーは数学者としての道を歩みだしたわけです。この後、彼は、ロシアやドイツで研究を続け、数多くの論文（年平均 800 頁）を発表し多くの懸賞を得ました。もちろん懸賞だけでなく地位も名声も得ました。晩年、オイラーは視力を無くすという不幸に見舞われましたが、子煩悩の彼は孫を膝の上に乗せ論文を書き続け、1783年9月18日 76歳の生涯を閉じるまで絶え間なく研究を続けていたそうです。

μ

陰解法による離散化 5.3

さて、5.2節で説明した陽解法はオイラーの **forward scheme**と呼ばれるものですが、この方法では空間分割数が増加してくると時間間隔を非常に小さくしないと計算が安定に進行しません。したがって、定常解を求める場合などは大変な計算時間が必要となります。そこで計算時間を短縮する、すなわち時間間隔を大きくするために陰解法（オイラーの **backward scheme**）を用いることが有効になります。陰解法は安定解析では無条件安定であるので、陽解法に比べ非常に大きな時間間隔をとることができます（実際計算をしてみると分かりますが多くの場合、陰解法のほうが計算時間が短くて済みます）。そこで、ここでは陰解法について説明します。陰解法になっても変わるのは渦度輸送方程式の時間積分だけですので、流れ関数の解析法は陽解法の場合と同じとなります。まず渦度輸送方程式を陰的に離散化すると以下の式が得られます。

$$\begin{aligned}
 & \frac{3^{n+1}_{i,j} - 3^n_{i,j}}{\phi t} + \frac{\tilde{A}^n_{i,j+1} - \tilde{A}^n_{i,j-1}}{2\phi y} \frac{3^{n+1}_{i+1,j} - 3^{n+1}_{i-1,j}}{2\phi x} \\
 & + \frac{\tilde{A}^n_{i+1,j} - \tilde{A}^n_{i-1,j}}{2\phi x} \frac{3^{n+1}_{i,j+1} - 3^{n+1}_{i,j-1}}{2\phi y} \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{3^{n+1}_{i+1,j} - 3^{n+1}_{i-1,j}}{\phi x^2} + \frac{3^{n+1}_{i,j+1} - 3^{n+1}_{i,j-1}}{\phi y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

変形すると

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{2\phi t}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\phi x^2} + \frac{1}{\phi y^2} \right) 3^{n+1}_{i,j} \\
 & = 3^n_{i,j} - \phi t \left(C_U \phi C_X + C_V \phi C_Y \right) + \frac{1}{\text{Re}} (VX + VY)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 CX &= \frac{3^{n+1}_{i+1,j} - 3^{n+1}_{i-1,j}}{2\phi x}; & CY &= \frac{3^{n+1}_{i,j+1} - 3^{n+1}_{i,j-1}}{2\phi y} \\
 VX &= \frac{3^{n+1}_{i+1,j} - 3^{n+1}_{i-1,j}}{\phi x^2}; & VY &= \frac{3^{n+1}_{i,j+1} - 3^{n+1}_{i,j-1}}{\phi y^2}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

SOR法を適用すると

$$(3^{n+1}_{i,j})^{(k+1)} = 3^{(k)}_{i,j} + \omega [(3^{n+1}_{i,j})^{(k+1)} - 3^{(k)}_{i,j}] \tag{5.13}$$

(5.13) 式を収束するまで計算することによって次の時刻の渦度が求まります。収束判定は $10^{-5} \gg 10^{-7}$ が用いられ、通常数回の反復で収束します。陽解法の問題を陰解法を用いて計算してみてください。

輸送方程式の安定性 5.4

さて、陽解法、陰解法に拘わらず時間間隔と空間間隔をいくつに設定したらよいかわいることが問題になります。これらは計算が安定に進む範囲に設定しなければいけません。流れの解析を行う場合、最も問題になるのははたして計算した答えがあるのだろうか？ということなのです。計算を行う場合に注意しなければならないのが、計算はたとえば方法が間違っても答えが出てくるといことです。さらに、流れ解析の場合は計算法が正しくても格子間隔や時間刻みの設定により正しくない答えを出すということが挙げられます。このようなことは絶対避けなければなりません。詳しくは後で述べますが、ここではまず、安定に計算を進めるための条件について考えてみましょう。渦度輸送方程式の代わりに次のバーガーズ方程式を考えます。

$$\frac{\partial^3}{\partial t} + u \frac{\partial^3}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial^3}{\partial x^3} \quad (5.14)$$

上式を FTCS 法で離散化すると

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (5.15)$$

$C = \frac{u \Delta t}{\Delta x}$, $R = \frac{u \Delta x}{\nu}$ において上式を整理すると

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{C}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{C}{R} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \\ &= C \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} \right] u_{i-1}^n + \left[1 - \frac{2C}{R} \right] u_i^n + C \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} \right] u_{i+1}^n \end{aligned} \quad (5.16)$$

上式において C はクーラン数、 R はセルレイノルズ数と呼ばれるもので、流れ解析において非常に重要なものです。(5.16) 式に対してフォン・ノイマンの安定解析を行います。

$$u_i^n = g^n \exp[ik(i\Delta x)] \quad (5.17)$$

を (5.16) 式に代入して整理すると

$$g^{n+1} \exp[ik(i\Delta x)] = C \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} \right] g^n \exp[ik(i-1)\Delta x] + (1-i) \frac{2C}{R} g^n \exp[ik(i\Delta x)] + C \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} \right] g^n \exp[ik(i+1)\Delta x] \quad (5.18)$$

上式の両辺を $g^n \exp[ik(i\Delta x)]$ で割ると

$$g = C \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} \right] \exp[ik\Delta x] + (1-i) \frac{2C}{R} + C \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} \right] \exp[ik\Delta x] \quad (5.19)$$

$$= (1-i) \left[1 + C \sin(k\Delta x) \right] + \frac{2C}{R} [1 + \cos(k\Delta x)]$$

熱伝導のときと同じで、 n 時刻に振幅 g 波数 k の波を入れたときに $n+1$ 時に増幅率が 1 より小さくならなければ誤差が成長していくことになります。したがって安定条件として、上式の実数部分と虚数部分が 1 より小さいときが安定となります。

$$\begin{aligned} |1 - i + C \sin(k\Delta x)| &< 1 \\ \frac{2C}{R} [1 + \cos(k\Delta x)] &< 1 \end{aligned}$$

変形すると

$$|C \sin(k\Delta x)| < 1$$

$\sin$ は 1 以下であるので

$$|C| < 1 \quad (5.20)$$

上式はクーラン、フリードリクスとレヴィの論文によって指摘されたので、彼らの頭文字をとって CFL 条件と呼ばれています。もう一つの式を変形すると

$$1 + \cos(k\Delta x) \leq 2$$

したがって $\frac{2C}{R} \leq 1$ となるので変数を元に戻すと、以下の式が得られます。

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha} \quad (5.21)$$

これらのことより陽解法の場合、(5.20)、(5.21) 式の条件を守らなければ安定な解析ができないことが分かります。

つぎに、陰解法の場合について考えます。差分方程式は以下のように表されます。

$$\frac{3_{i+1}^{n+1} - 3_i^{n+1}}{\Delta t} + u_i \frac{3_{i+1}^{n+1} - 3_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \frac{3_{i+1}^{n+1} - 23_i^{n+1} + 3_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (5.22)$$

陽解法の場合と同様に、クーラン数と、セルレイノルズ数を用いて変形すると

$$3_i^{n+1} = 3_i^n + \frac{C}{2}(3_{i+1}^{n+1} - 3_{i-1}^{n+1}) + \frac{C}{R}(3_{i+1}^{n+1} - 23_i^{n+1} + 3_{i-1}^{n+1}) \quad (5.23)$$

$$3_i^n = i C \frac{1}{R} + \frac{1}{2} 3_{i-1}^{n+1} + 1 + \frac{2C}{R} 3_i^{n+1} + C \frac{1}{R} + \frac{1}{2} 3_{i+1}^{n+1} \quad (5.24)$$

増幅率を求めると

$$\begin{aligned} g^n \exp[i k (i \Delta x)] &= i C \frac{1}{R} + \frac{1}{2} g^{n+1} \exp[i k (i - 1) \Delta x] \\ &+ 1 + \frac{2C}{R} g^{n+1} \exp[i k (i \Delta x)] \\ &+ C \frac{1}{R} + \frac{1}{2} g^{n+1} \exp[i k (i + 1) \Delta x] \end{aligned} \quad (5.25)$$

イクスポーネンシャルで割ると

$$1 = i C \frac{1}{R} + \frac{1}{2} g \exp[i k \Delta x] + 1 + \frac{2C}{R} g + C \frac{1}{R} + \frac{1}{2} g \exp[i k \Delta x] \quad (5.26)$$

三角関数の公式（オイラーの公式、あるいはド・モアブルの公式）を用いて変形すると

$$i \frac{2C}{R} g \cos(k \Delta x) + C \sin(k \Delta x) + 1 + \frac{2C}{R} g = 1 \quad (5.27)$$

よって

$$g = \frac{1}{1 + \frac{2C}{R}[1 - \cos(k \Delta x)] + C \sin(k \Delta x)} \quad (5.28)$$

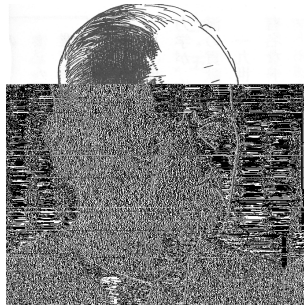
上式を変形すると

$$g = \frac{1 + \frac{2C}{R}[1 - \cos(k \Delta x)] - C \sin(k \Delta x)}{1 + \frac{2C}{R}[1 - \cos(k \Delta x)] + C^2 \sin^2(k \Delta x)} \quad (5.29)$$

F コーヒーブレイク

¶ ルードヴィヒ・プラントル (Ludwig Prandtl, 1875 » 1953)

3



ナビエとストークスが生み出した粘性流体の流動を表す方程式は、多くの研究者がその扱い方を研究しましたが、誰もうまく扱うことができない状態でした。このような中、1904年、ハノーバー工科大学のプラントルが8頁の短い論文を発表しました。28歳の若者が書いたこの論文には、それまでにはなかった境界層という概念が示され、さらに、その中ではナビエ・ストークス方程式が簡素化されることを示した画期的なものでした。この簡素化は、ナビエ・ストークス方程式という要塞の城郭の一部を見事に崩し、その様相をわずかながらでも知ることができるようになったのでした。彼はこの業績により、ゲッチンゲン大学の教授として招へいされ、次々に研究機関を作り、数多くの実験や理論を生み出していったのでした。これらの結果はとくに、航空工学で花を開き、今日の航空工学のほとんどすべての基礎を築いたといっても過言ではありません。

プラントルは人付き合いが苦手な人でもありました。彼は第二次世界大戦中も熱心に研究を行いましたが、戦争が起こっていることを忘れることもしばしばだったようです。ピアノの演奏が好きだったプラントルが育てた弟子たちは、その後の科学分野に大きな貢献をしたのでした。

μ

付 録

Appendix



プログラムリスト

Program list

```

C *****
C ** THE UNSTEADY VISCOUS FLOW COMPUTATION **
C ** VORTICITY TRANSPORT EQUATION AND **
C ** POISSON EQUATION FOR STREAM FUNCTION **
C ** FORWARD TIME CENTERED SPACE METHOD **
C ** CARTESIAN COORDINATE **
C ** FOR PC9801 VERSION **
C ** 1989/12/17 fluid reseach **
C *****
C *****
C *** MAIN ROUTINE ***
C *****
C CALL INIT
C CALL CLEAR
C CALL CALFLW
C

```

```

      CALL OUTPUT
C
C
      STOP
      END
C
C
      *****
      ** TIME MARCHING LOOP**
      *****
C
      SUBROUTINE CALFLW
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      COMMON /TIMEC/ TIME
      COMMON /CONST1/ RE,DT
C
      LOOP=0
C
      50 LOOP=LOOP+1
C
C
      CALL STREAM
C
      CALL BOUNDV
C
      CALL VORT
C
      CALL JUDGE(ERR)
C
      TIME=TIME+DT
C
      IF(MOD(LOOP,100).EQ.0) THEN
C
      WRITE(*,600) TIME,ERR
      600 FORMAT(' TIME & RESIDUAL=',F10.4,2X,E9.4)
C
      END IF
C
      IF(TIME.GT.500.D0) GOTO 60
      IF(ERR.LT.1.D-6) GOTO 90
C
      GOTO 50
C
      60 WRITE(*,610)
      610 FORMAT(' NOT CONVERGED!')
C
C
      90 RETURN
      END
C
C
      *****
      ** INITIAL CONDITION SETTING **
      *****
C
      SUBROUTINE INIT
C
      PARAMETER (MX=512,MY=512)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

```

```

COMMON /DIVIDE/ NX,NY,NXM1,NYM1
COMMON /ITERAT/ ITER1
COMMON /CONV1/ OMEGA1,EPS1
COMMON /CONST1/ RE,REI,DT
COMMON /TIMEC/ TIME
COMMON /DELTA/ DX,DY,DXI,DYI,DX2I,DY2I

C
C
C
*****  NUMBER OF FIELD DIVIDE *****

    NX  =21
    NY  =21
    NXM1=NX-1
    NYM1=NY-1

C
C
C
*****  DIVIDE LENGTH *****

    DX  =1.0D0/DFLOAT(NXM1)
    DY  =1.0D0/DFLOAT(NYM1)
    DXI =1.0D0/DX
    DYI =1.0D0/DY
    DX2I=1.0D0/DX/DX
    DY2I=1.0D0/DY/DY

C
C
C
*****  ITERATION CONSTANT FOR POISSON EQ. ***

    ITER1 =100
    OMEGA1=1.8D0
    EPS1  =1.0D-6

C
C
C
***  REYNOLDS NUMBER ***

    RE =100.0D0
    REI=1.D0/RE

C
C
C
    DT=0.001D0

C
C
C
RETURN
END

C
C
C
*****
**  SUBROUTINE ARRAY INITIALIZED **
*****

SUBROUTINE CLEAR

C
PARAMETER (MX=512,MY=512)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
COMMON /FLOW/ PSI(MX,MY),ZETA(MX,MY)
COMMON /DIVIDE/ NX,NY,NXM1,NYM1

C
DO 100 J=1,NY
C
DO 100 I=1,NX

    PSI(I,J) =0.0D0
100    ZETA(I,J)=0.0D0
C

```

```

C      READ(12,600) NX,NY,RE,TIME
C      600 FORMAT(2I5,F10.1,F10.4)
C
C      READ(12,610)((PSI(I,J),ZETA(I,J),I=1,NX),J=1,NY)
C      610 FORMAT(2F15.7)
C
C      RETURN
C      END
C
C      *****
C      **      RESULTS OUTPUT TO FILE **
C      *****
C
C      SUBROUTINE OUTPUT
C
C      PARAMETER (MX=512,MY=512)
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C      COMMON /FLOW/ PSI(MX,MY),ZETA(MX,MY)
C      COMMON /DIVIDE/ NX,NY,NXM1,NYM1
C      COMMON /DELTA/ DX,DY,DXI,DYI,DX2I,DY2I
C      COMMON /CONST1/ RE,REI,DT
C      COMMON /TIMEC/ TIME
C      DIMENSION X(MX),UU(MY),VV(MX)
C
C      WRITE(3,600) NX,NY,RE,TIME
C      600 FORMAT(2I5,F10.1,F10.4)
C
C      WRITE(3,610)((PSI(I,J),ZETA(I,J),I=1,NX),J=1,NY)
C      610 FORMAT(2F15.7)
C
C      IH=(NX+1)/2
C
C      DO 110 J=2,NYM1
C
C      110    UU(J)= 0.5D0 * (PSI(IH,J+1)-PSI(IH,J-1))      * DYI
C      X(J)=DBLE(J-1)/DBLE(NY-1)
C
C      JH=(NY+1)/2
C
C      DO 120 I=2,NXM1
C
C      120    VV(I)=-0.5D0 * (PSI(I+1,JH)-PSI(I-1,JH))      * DYI
C
C      X(NY)=1.D0
C      UU(NY)=1.D0
C
C      WRITE(10,650) (X(J),UU(J),VV(J),J=1,NY)
C      650 FORMAT(3F10.5)
C
C      RETURN
C      END
C
C      *****
C      **      JUDGEMENT OF STEADY STATE

```

```

C *****
C
C SUBROUTINE JUDGE(ERRS)
C
C   PARAMETER (MX=512,MY=512)
C   IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C   COMMON /DIVIDE/ NX,NY,NXM1,NYM1
C   COMMON /FLOW/ PSI(MX,MY),ZETA(MX,MY)
C   COMMON /OLDZ/ ZO(MX,MY)
C
C   どの点で最大値を取っているかは分からない
C   それが分かるように変更しよう
C
C   ERRS=0.D0
C
C   DO 100 J=2,NYM1
C   DO 100 I=2,NXM1
C
C       SQZ=(ZETA(I,J)-ZO(I,J))      ** 2
100  ERRS=ERRS+SQZ
C
C   ERRS=DSQRT(ERRS/DFLOAT((NX-2)*(NY-2)))
C
C   RETURN
C   END
C
C *****
C   ** VORTICITY BOUNDARY CONDITION*
C *****
C
C SUBROUTINE BOUNDV
C
C   PARAMETER (MX=512,MY=512)
C   IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C   COMMON /FLOW/ PSI(MX,MY),ZETA(MX,MY)
C   COMMON /DIVIDE/ NX,NY,NXM1,NYM1
C   COMMON /DELTA/ DX,DY,DXI,DYI,DX2I,DY2I
C
C   DO 100 I=1,NX
C
C       ZETA(I,1 )=
C       ZETA(I,NY)=
C
C 100 CONTINUE
C
C   DO 110 J=1,NY
C
C       ZETA(1 ,J)=
C       ZETA(NX,J)=
C
C 110 CONTINUE
C
C   RETURN
C   END

```



```

C
C *****
C ** CALCULATE STREAM FUNCTION
C *****
C
C SUBROUTINE STREAM
C
C   PARAMETER (MX=512,MY=512)
C   IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C   COMMON /FLOW/ PSI(MX,MY),ZETA(MX,MY)
C   COMMON /DIVIDE/ NX,NY,NXM1,NYM1
C   COMMON /ITERAT/ ITER1
C   COMMON /CONV1/ OMEGA1,EPS1
C   COMMON /DELTA/ DX,DY,DXI,DYI,DX2I,DY2I
C
C ***** SUCCESSIVE OVER RELAXATION LOOP *****
C
C   COEF=1.D0/(2.D0 * (DX2I+DY2I))
C
C   DO 300 LOOP=1,ITER1
C
C     ERR=0.0D0
C
C     ***** CAL. INTERNAL POINT *****
C
C     DO 100 J=2,NYM1
C     DO 100 I=2,NXM1
C
C       PT=
C
C       DP=PT* COEF-PSI(I,J)
C
C       PSI(I,J)=PSI(I,J)+OMEGA1      * DP
C
C       ERR=ERR+DP*DP
C
C 100 CONTINUE
C
C       ERR=DSQRT(ERR/DFLOAT((NX-2)*(NY-2)))
C       IF(ERR.LT.EPS1) GOTO 99
C
C 300 CONTINUE
C
C 99 CONTINUE
C
C   WRITE(*,600) LOOP,ERR
C 600 FORMAT(' LOOP & ERROR=',I5,E12.5)
C
C   RETURN
C   END
C
C *****
C ** CALCULATE VORTICITY **
C *****
C
C SUBROUTINE VORT

```

```

C      PARAMETER (MX=512,MY=512)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      COMMON /FLOW/ PSI(MX,MY),ZETA(MX,MY)
      COMMON /DIVIDE/ NX,NY,NXM1,NYM1
      COMMON /DELTA/ DX,DY,DXI,DYI,DX2I,DY2I
      COMMON /CONST1/ RE,REI,DT
      COMMON /OLDZ/ ZO(MX,MY)
      DIMENSION UU(MX,MY),VV(MX,MY)

C      DO 100 J=1,NY
      DO 100 I=1,NX
C
C      100      ZO(I,J)=ZETA(I,J)
C
      DO 110 J=2,NYM1
      DO 110 I=2,NXM1
C
C      110      UU(I,J)=
      VV(I,J)=
C
C      DO 120 J=2,NYM1
      DO 120 I=2,NXM1
C
C      ***** CONVECTIVE TERM *****
C
C      CONV=
C      &
C      ***** VISCOUS TERM *****
C
C      VISC=
C      &
C      ZETA(I,J)=ZO(I,J)+DT      * (-CONV+VISC*REI)
C
C      120 CONTINUE
C
C      RETURN
      END

```

