1961 年京大文 $\boxed{5}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2xy=b^2$ より　$xy=\dfrac{a^2-b^2}{2}$

$x,\ y$ は二次方程式 $t^2-at+\dfrac{a^2-b^2}{2}=0$ の 2 解である。 $f(t)=t^2-at+\dfrac{a^2-b^2}{2}=\left(t-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2-2b^2}{4}$ とする。

このとき、 $f(t)=0$ が $-1\leqq t\leqq 1$ において重解を含む 2 実数解を持つ条件は

軸 $t=\dfrac{a}{2}$ について　$-1\leqq\dfrac{a}{2}\leqq 1$　$\therefore -2\leqq a\leqq 2$ ――①

$f(-1)=1+a+\dfrac{a^2-b^2}{2}\geqq 0$　$(a+1)^2+1-b^2\geqq 0$　$\therefore b^2-(a+1)^2\leqq 1$ ――②

$f(1)=1-a+\dfrac{a^2-b^2}{2}\geqq 0$　$(a-1)^2+1-b^2\geqq 0$　$\therefore b^2-(a-1)^2\leqq 1$ ――③

$\dfrac{a^2-2b^2}{4}\leqq 0$　$a^2-2b^2\leqq 0$　$(a+\sqrt{2}b)(a-\sqrt{2}b)\leqq 0$ ――④

②、③は双曲線に挟まれた領域を示し、

④は 2 直線に挟まれた領域を示す。

①～④を図示すると、右図の通り。境界線を含む。

$b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}a$ は、双曲線 $b^2-(a\pm 1)^2=1$ の接線である。