

1961 年京大理 5

$n \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S &= (1-n) + (2-n) + \cdots + (100-n) = (1+2+\cdots+100) - 100n = \frac{100 \cdot 101}{2} - 100n \\ &= 5050 - 100n \geq 4950 \end{aligned}$$

$n \geq 100$ のとき

$$S = (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-100) = 100n - (1+2+\cdots+100) = 100n - 5050 \geq 4950$$

$2 \leq n \leq 99$ のとき $n = k$ ($2 \leq k \leq 99$) とすると

$$\begin{aligned} S &= (k-1) + \cdots + \{k - (k-1)\} + \{(k+1) - k\} + \cdots + (100-k) = \{1+2+\cdots+(k-1)\} + \{1+2+\cdots+(100-k)\} \\ &= \frac{(k-1)k}{2} + \frac{(100-k)(101-k)}{2} = \frac{k^2 - k + 10100 - 201k + k^2}{2} = k^2 - 101k + 5050 = \left(k - \frac{101}{2}\right)^2 + \frac{9999}{4} \end{aligned}$$

k は自然数であるから、 $k = 50, 51$ のとき、 S は最小になる。最小値は $\frac{1}{4} + \frac{9999}{4} = 2500$

以上により、 S の最小値は 2500、そのときの n は $n = 50, 51 \cdots$ (答)