1961 年京大理 $\boxed{6}$

A の出発点を基準としたときの、t 秒後の A, B の直線上の位置を、x_A cm, x_B cm とすると

$$x_A=\int_0^t (s^2+5)ds=\left[\frac{1}{3}s^3+5s\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3+5t \qquad x_B=2+\int_0^t 5sds=\left[\frac{5}{2}s^2\right]_0^t+2=\frac{5}{2}t^2+2$$

$0\leqq t\leqq 4$ の範囲で、$x_A=x_B$ となる t の個数を調べればよい。

すなわち、$f(t)=x_A-x_B=\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{5}{2}t^2+5t-2$ としたとき、$0\leqq t\leqq 4$ の範囲で、$f(t)=0$ となる t の個数を調べればよい。

$f'(t)=t^2-5t+5$ より、$f'(t)=0$ を解くと　$t=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$　$0<\dfrac{5-3}{2}<\dfrac{5-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}<\dfrac{5+3}{2}=4$

$f(t)$ の増減は右の通り。

t	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(t)=\left(\dfrac{1}{3}t-\dfrac{5}{6}\right)(t^2-5t+5)-\dfrac{5}{6}t+\dfrac{13}{6}$ より

$$f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)=-\frac{5}{6}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{2}+\frac{13}{6}=\frac{1+5\sqrt{5}}{12}>0$$

$$f\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)=-\frac{5}{6}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{2}+\frac{13}{6}=\frac{1-5\sqrt{5}}{12}<0$$

$f(0)=-2<0,\ f(4)=\dfrac{64}{3}-40+20-2=-\dfrac{2}{3}<0$ より、$f(t)$ は、$0<t<\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ および $\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}<t<4$ において、$f(t)=0$ となる。

$0\leqq t\leqq 4$ において、A と B が重なる回数は、2 回。……(答)