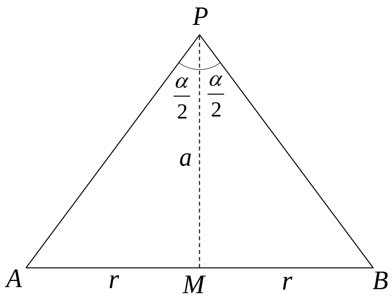
1961年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

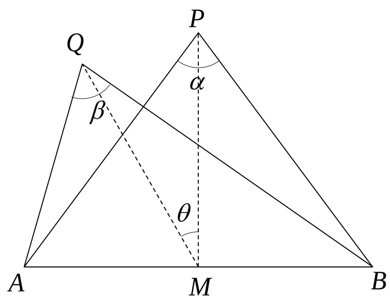
（i）



$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{r}{a}\neq 1$であるから　$\tan\alpha=\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\cdot\dfrac{r}{a}}{1-\dfrac{r^2}{a^2}}=\dfrac{2ar}{a^2-r^2}$　……(答)

（ii）

点Qは、点Pから見て点A側にあるとする。



このとき、$\angle AMQ=\dfrac{\pi}{2}-\theta,\ \angle BMQ=\dfrac{\pi}{2}+\theta$であるから、余弦定理より

$$AQ^2=a^2+r^2-2ar\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=a^2+r^2-2ar\sin\theta$$

$$BQ^2=a^2+r^2-2ar\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=a^2+r^2+2ar\sin\theta$$

$$\cos\beta=\frac{AQ^2+BQ^2-AB^2}{2AQ\cdot BQ}=\frac{2(a^2+r^2)-4r^2}{2AQ\cdot BQ}=\frac{a^2-r^2}{AQ\cdot BQ}\quad ――①$$

また、QとABの距離は、$a\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=a\cos\theta$であるから、$\triangle ABQ$の面積を$S$とすると

$$S=\frac{1}{2}AQ\cdot BQ\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot a\cos\theta\qquad \sin\beta=\frac{2ar}{AQ\cdot BQ}\cos\theta\quad ――②$$

①、②より　$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{2ar}{a^2-r^2}\cos\theta$　(i)より　$\therefore \tan\alpha\cdot\cos\theta=\tan\beta$　（証明終）

対称性より、点Qが、点Pから見て点B側にあっても、同じである。