

1961年京大理 4 文 4 共通

B は毎時 b km で A を追い、 t 時間後に追いつくとする。ただし、 $b > a$ である。

$$l + at = bt \quad (b - a)t = l \quad \therefore t = \frac{l}{b - a}$$

B の疲労は、 $b^2 t = \frac{b^2 l}{b - a}$ に比例する。 l は定数であり、 $f(b) = \frac{b^2}{b - a}$ が最小になればよい。

$$f(b) = \frac{b^2 - a^2 + a^2}{b - a} = b + a + \frac{a^2}{b - a} = 2a + (b - a) + \frac{a^2}{b - a}$$

ここで、相加平均・相乗平均の関係より $(b - a) + \frac{a^2}{b - a} \geq 2\sqrt{(b - a) \cdot \frac{a^2}{b - a}} = 2a$

等号成立は、 $b - a = \frac{a^2}{b - a}$ のとき。 $(b - a)^2 = a^2 \quad b - a = a \quad \therefore b = 2a$

以上により、 $f(b)$ を最小にする b は $\therefore b = 2a$ ……(答)

※微分法で求めてもよい。