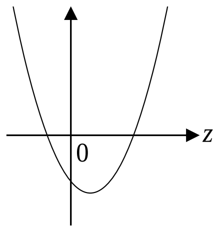
1962年京大文$\boxed{5}$

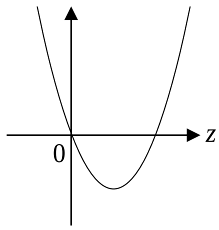
$f(z)=z^2+(a+x)z+\dfrac{1}{4}(x^2-y^2)=\left(z+\dfrac{a+x}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}(a^2+2ax+y^2)$ とする。

$f(z)=0$ が、少なくとも1つの正の実数解を持つ条件を考える。

$f(0)<0$



$f(0)=0$



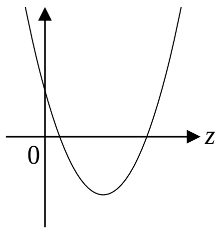
$f(z)=0$ が、1つの正の実数解と、1つの正でない実数解を持つとき

$f(0)=\dfrac{1}{4}(x^2-y^2)<0$ 、 $x^2<y^2$ であれば、条件を満たす。

$f(0)=0$ 、 $x^2=y^2$ のとき、 $f(z)=z^2+(a+x)z=z(z+a+x)$ より

$-a-x>0 \quad \therefore x<-a$

$f(0)>0$



$f(z)=0$ が、2つの正の実数解（重解を含む）を持つとき

$f(0)=\dfrac{1}{4}(x^2-y^2)>0$ 　軸 $-\dfrac{a+x}{2}>0$ 　$-\dfrac{1}{4}(a^2+2ax+y^2)\leqq 0$

$\therefore x^2>y^2,\ x<-a,\ x\geqq -\dfrac{1}{2a}y^2-\dfrac{a}{2}$

放物線 $x=-\dfrac{1}{2a}y^2-\dfrac{a}{2}$ と、2直線 $y=\pm x$ の交点は、 $a^2+2ax+y^2=0$ において、 $y^2=x^2$ とすると

$a^2+2ax+x^2=(a+x)^2=0 \quad \therefore x=-a$

以上により、点 P の存在範囲は

$x^2<y^2$ 　または　 $x^2\geqq y^2$ かつ $x<-a$ かつ $x\geqq -\dfrac{1}{2a}y^2-\dfrac{a}{2}$ ……（答）

図示すると右図の通り。
境界線は太線部のみ含み、点 $(-a,\pm a)$ は含まない。

放物線 $x=-\dfrac{1}{2a}y^2-\dfrac{a}{2}$ は、点 $(-a,\ a)$ において直線 $y=-x$ と、

点 $(-a,\ -a)$ において直線 $y=x$ と、それぞれ接する。