1962年京大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

（イ）

$(k+1)(x^2+y^2)=ax+kby$を、$k$について整理すると　$k(x^2+y^2-by)+(x^2+y^2-ax)=0$

$-1$でない任意の実数$k$について成立するとき　$x^2+y^2-by=0$ ――①　$x^2+y^2-ax=0$ ――②

①－②より　$-by+ax=0$　$y=\dfrac{a}{b}x$ ①に代入して　$x^2+\dfrac{a^2}{b^2}x^2-ax=0$

$(a^2+b^2)x^2-ab^2x=x\left\{(a^2+b^2)x-ab^3\right\}=0$　$x=0,\ \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$

以上により、$-1$でない任意の実数$k$について、2点$(0,\ 0),\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$を通る。（証明終）

（ロ）

2定点を通る円の中心は、その2定点からの距離が等しいから、2定点を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。

（イ）で求めた2定点を結ぶ線分の傾きは$\dfrac{a}{b}$であり、中点は$\left(\dfrac{ab^2}{2(a^2+b^2)},\ \dfrac{a^2b}{2(a^2+b^2)}\right)$であるから、

垂直二等分線の方程式は

$$y=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}\right)+\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}=-\frac{b}{a}x+\frac{b^3+a^2b}{2(a^2+b^2)}=-\frac{b}{a}x+\frac{b}{2}\quad \therefore bx+ay=\frac{ab}{2}\ \text{――①}$$

ここで、元の式を整理すると　$x^2+y^2=\dfrac{a}{k+1}x+\dfrac{kb}{k+1}y$　$\left(x-\dfrac{a}{2(k+1)}\right)^2+\left(y-\dfrac{kb}{2(k+1)}\right)^2=\dfrac{a^2+k^2b^2}{4(k+1)^2}$

中心の座標は$\left(\dfrac{a}{2(k+1)},\ \dfrac{kb}{2(k+1)}\right)$で与えられ、①を満たすが、$\dfrac{1}{k+1}\neq 0,\ \dfrac{k}{k+1}=1-\dfrac{1}{k+1}\neq 1$である。

求める軌跡は、直線$bx+ay=\dfrac{ab}{2}$から、点$\left(0,\ \dfrac{b}{2}\right)$を除いた部分である。……（答）

※（ロ）は、$x=\dfrac{a}{2(k+1)},\ y=\dfrac{kb}{2(k+1)}$から$k$を消去しても得られる。結局、除外する点がないか、議論が必要なため、その方がよいかもしれない。