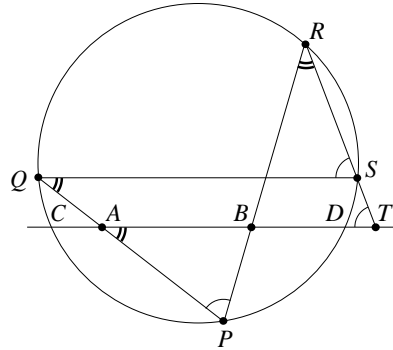
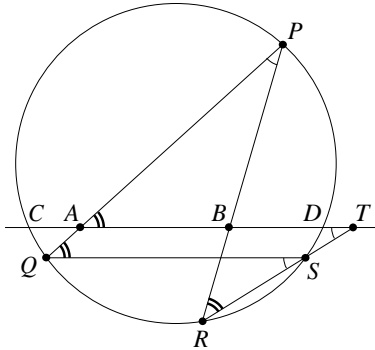


直線  $AB$  と定円の交点を  $C, D$ 、直線  $RS$  と直線  $AB$  の交点を  $T$  とする。

i)  $PR$  と  $QS$  が交差するとき

円周角の定理より  $\angle QPR = \angle QSR, \angle PQS = \angle PRS$   $AB \parallel QS$  より  $\angle QSR = \angle BTR, \angle PQS = \angle PAB$   
したがって、 $\angle APB = \angle RTB, \angle PAB = \angle TRB$  より  $\therefore \triangle PAB \sim \triangle TRB$

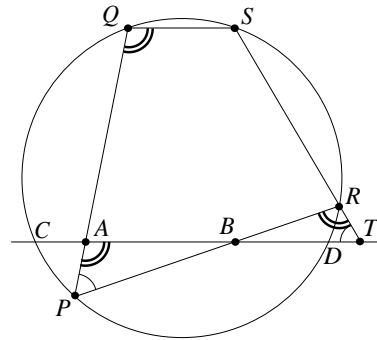
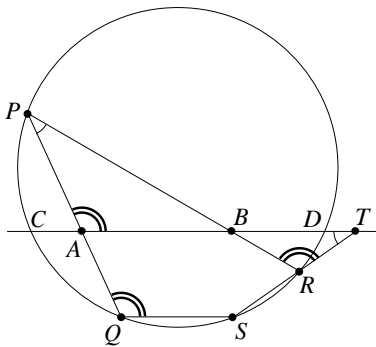
$BA : BR = BP : BT$  より  $\therefore BA \cdot BT = BP \cdot BR$



ii)  $P, Q, S, R$  の順に四角形になるとき

対角の和は  $\pi$  であるから  $\angle PRS = \pi - \angle PQS$   $AB \parallel QS$  より  $\angle PAB = \angle PQS$  で、 $\angle PRS = \pi - \angle PAB$   
 $\therefore \angle TRB = \pi - \angle PRS = \angle PAB$  これと  $\angle PBA = \angle TBR$  より  $\therefore \triangle PAB \sim \triangle TRB$

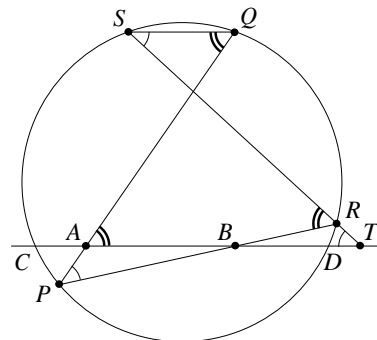
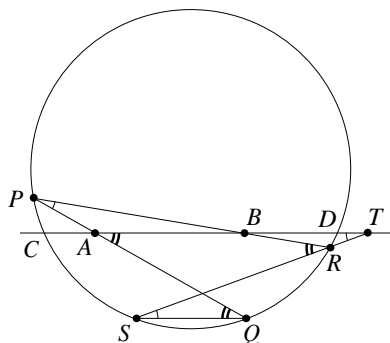
$BA : BR = BP : BT$  より  $\therefore BA \cdot BT = BP \cdot BR$



iii)  $PQ$  と  $RS$  が交差するとき

円周角の定理より  $\angle QPR = \angle QSR$   $AB \parallel SQ$  より  $\angle QSR = \angle RTB$   
 $\therefore \angle APB = \angle RTB$  これと  $\angle PBA = \angle TBR$  より  $\therefore \triangle PAB \sim \triangle TRB$

$BA : BR = BP : BT$  より  $\therefore BA \cdot BT = BP \cdot BR$



したがって、いずれの場合も、 $BA \cdot BT = BP \cdot BR$ が成立する。

ここで、方べきの定理により  $BP \cdot BR = BC \cdot BD$

$BC, BD$  は一定であるから、 $BP \cdot BR$  は一定であり、 $BA \cdot BT$  は一定。

$BA$  は一定であるから、 $BT$  は一定。

以上により、 $T$  は  $P$  の位置によらない定点であるので、題意は示された。(証明終)

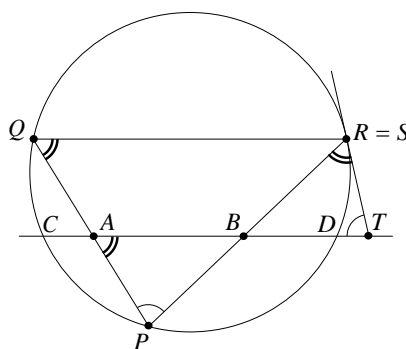
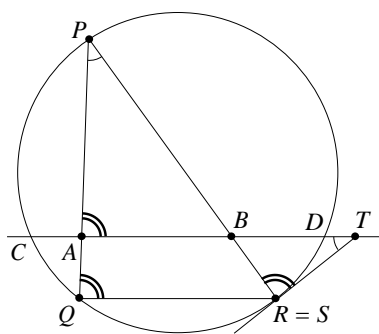
(注 1)

$R$  と  $S$  が一致する場合もあり得る。その場合、 $R$  における定円の接線が、 $T$  を通る。

$AB \parallel QR$  より  $\angle PAB = \angle PQR$  接弦定理により  $\angle PQR = \angle TRB$

$\therefore \angle PAB = \angle TRB$  これと  $\angle PBA = \angle TBR$  より  $\therefore \triangle PAB \sim \triangle TRB$

$BA : BR = BP : BT$  より  $\therefore BA \cdot BT = BP \cdot BR$



(注 2)

$BP \cdot BR = BC \cdot BD$  であることは、円周角の定理より容易にわかる。

$\angle BPC = \angle BDR, \angle BCP = \angle BRD$  より  $\therefore \triangle PBC \sim \triangle DBR$

$BC : BR = BP : BD$  より  $\therefore BP \cdot BR = BC \cdot BD$

