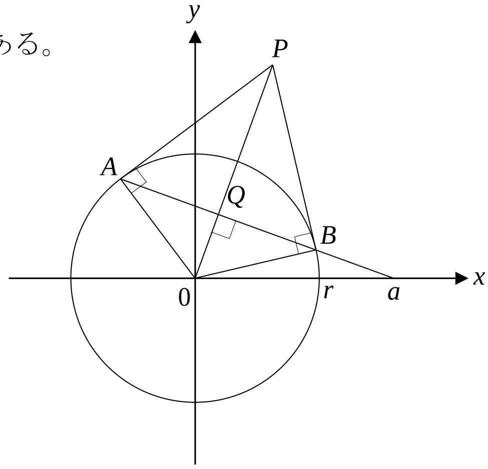
1963 年京大文 $\boxed{6}$

定点 $(a,\ 0)$ を通る直線 $y=m(x-a)\ (m\neq 0)$ と、定円 $x^2+y^2=r^2$ の、2 つの交点を $A,\ B$ とする。

$A,\ B$ における接線の交点 P は、線分 AB の垂直二等分線 $y=-\dfrac{1}{m}x$ 上にある。



AB と OP の交点 Q は、$\left(\dfrac{m^2}{m^2+1}a,\ -\dfrac{m}{m^2+1}a\right)$ であるから　$OQ^2=\dfrac{m^2}{m^2+1}a^2$

右図より、三角形の相似性から

$OP:OA=OA:OQ$　$OP\cdot OQ=OA^2$　$OP^2=\dfrac{OA^4}{OQ^2}=\left(1+\dfrac{1}{m^2}\right)\dfrac{r^4}{a^2}$

$P\left(t,\ -\dfrac{1}{m}t\right)$ とすると、$OP^2=\left(1+\dfrac{1}{m^2}\right)t^2$ であるから　$t^2=\dfrac{r^4}{a^2}$　$\therefore t=\dfrac{r^2}{a}$

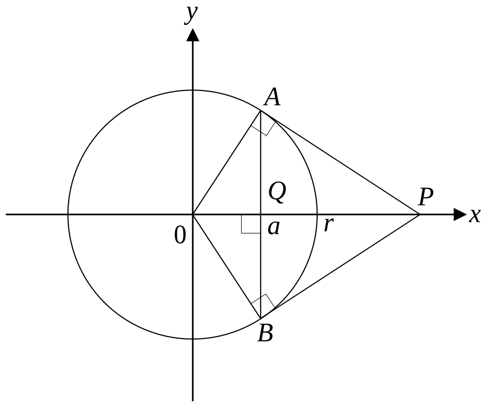
これより、P は直線 $x=\dfrac{r^2}{a}$ 上を動く。

直線 $x=a$ と、定円 $x^2+y^2=r^2$ の交点について考える。

2 つの交点を持つのは、$a<r$ のときのみである。

このとき、P は x 軸上にあり、上と同様に三角形の相似性から

$OP:OA=OA:OQ$　$OP=\dfrac{OA^2}{OQ}=\dfrac{r^2}{a}>r$



したがって、$a<r$ のとき、P は直線 $x=\dfrac{r^2}{a}$ の全体を動く。

以上により、P の軌跡は、直線 $x=\dfrac{r^2}{a}$ のうち、円 $x^2+y^2=r^2$ の外部にある部分である。……(答)

円周上を含まない。