1963 年京大理 $\boxed{6}$

$$\int_0^x \cos t\,dt - 2\int_0^x \sin t\,dt = \left[\sin t\right]_0^x - 2\left[-\cos t\right]_0^x = \sin x + 2\cos x - 2$$

$f(x) = \sin x + 2\cos x - 2$ として、$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ において、 $f(x) > 0$ が成り立てばよい。

$f'(x) = \cos x - 2\sin x \qquad f''(x) = -\sin x - 2\cos x$

$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ において、 $\sin x > 0,\ \cos x > 0$ であるから、 $f''(x) < 0$ であり、 $f'(x)$ は単調減少である。

$f'(0) = 1 > 0,\ f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 0$ より、$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ において、$f'(x) = 0$ となる実数 x が、ただ 1 つ存在する。

この x を α とすると、 $f(x)$ の増減は右の通り。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$x = \alpha$ で極大となるから、$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ において、 $f(x) > 0$

であるためには、 $f(0) \geqq 0$ かつ $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \geqq 0$ であればよい。

$f(0) = 0$ 、 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - 2 = \dfrac{3\sqrt{2} - 4}{2} > 0$ であるから、$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ において、 $f(x) > 0$ が成立。

したがって、題意は示された。（証明終）