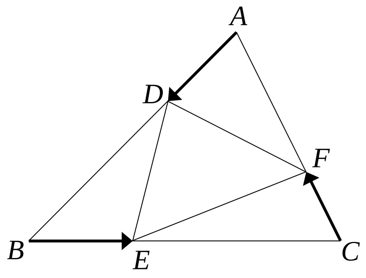
1963年京大理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通

（イ）



時刻$t\,(0 \leqq t \leqq 1)$において、点$D,\ E,\ F$は、それぞれ辺$AB,\ BC,\ CA$を、$t:(1-t)$に内分する。原点Oを基準とした位置ベクトルを考えると

$$\overrightarrow{OD}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB} \quad \overrightarrow{OE}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC} \quad \overrightarrow{OF}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OA}$$

このとき、$\triangle DEF$の重心は

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})=\frac{1-t}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\frac{t}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$\triangle DEF$の重心は、時刻tに関わらず、$\triangle ABC$の重心に一致する。

すなわち、$0 \leqq t \leqq 1$において、$\triangle DEF$の重心は動かない。（証明終）

（ロ）

$\triangle ABC$の面積をSとする。

$AD=tAB,\ AF=(1-t)AC$であるから、$\triangle ADF$の面積は、$t(1-t)S$である。

同様に、$\triangle BDE$と$\triangle CEF$の面積も、$t(1-t)S$である。

$\triangle DEF$の面積は　$S-3t(1-t)S=(3t^2-3t+1)S=\left\{3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}S$

$t=\frac{1}{2}$のとき、最小値$\frac{S}{4}$をとるから、$\triangle DEF$の面積の最小値は、$\triangle ABC$の面積の$\frac{1}{4}$倍。……（答）