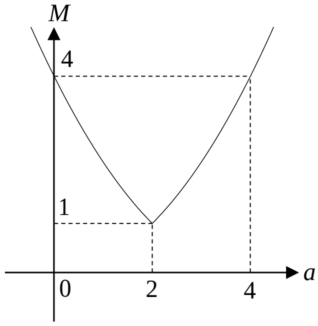
1964 年京大文 $\boxed{6}$

$f(x)=y_1-y_2=x^2-ax-b=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-b$ とし、$|y_1-y_2|=|f(x)|$ の最大値を M とする。

$-\dfrac{a^2}{4}-b\geqq 0\quad b\leqq-\dfrac{a^2}{4}$ のとき

$|y_1-y_2|=f(x)$ であるから、$0\leqq x\leqq 2$ における M は、$f(0)$ と $f(2)$ のうち、大きいほうである。



$f(0)=-b\geqq\dfrac{a^2}{4}\qquad f(2)=4-2a-b\geqq 4-2a+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{(a-4)^2}{4}$

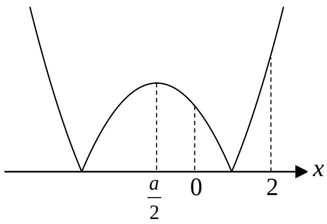
グラフより、M は $a=2$ のとき最小値1をとる。このとき、$b=-1$ である。

$-\dfrac{a^2}{4}-b<0\quad b>-\dfrac{a^2}{4}$ のとき

$\dfrac{a}{2}\leqq 0\quad a\leqq 0$ のとき、M は、$-f(0)=b$ と $f(2)=4-2a-b$ のうち、

大きい方である。M が最小になるのは、$-f(0)=f(2)$ のときで、

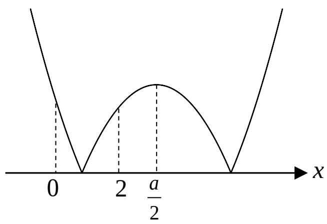
$b=4-2a-b\quad 2b=4-2a\quad \therefore b=2-a\quad \therefore M=2-a$



$2\leqq\dfrac{a}{2}\quad 4\leqq a$ のとき、M は、$f(0)=-b$ と $-f(2)=-4+2a+b$ のうち、

大きい方である。M が最小になるのは、$f(0)=-f(2)$ のときで、

$-b=-4+2a+b\quad 2b=4-2a\quad \therefore b=2-a\quad \therefore M=a-2$

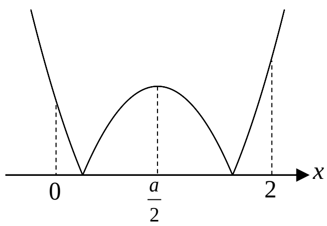


$0<\dfrac{a}{2}<2\quad 0<a<4$ のとき

M は、$f(0)=-b$ と $f(2)=4-2a-b$ と $-f\left(\dfrac{a}{2}\right)=b+\dfrac{a^2}{4}$ のうちの最大値である。

$0<a\leqq 2$ のとき $f(0)\leqq f(2)$、$2\leqq a<4$ のとき $f(0)\geqq f(2)$ であるから

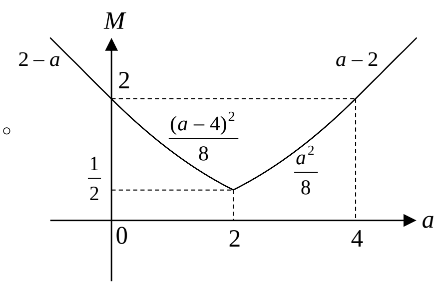
$0<a\leqq 2$ のとき、M が最小になるのは、$-f\left(\dfrac{a}{2}\right)=f(2)$ のときで、



$b+\dfrac{a^2}{4}=4-2a-b\quad 2b=-\dfrac{a^2}{4}-2a+4\quad b=-\dfrac{a^2}{8}-a+2\quad \therefore M=\dfrac{1}{8}a^2-a+2=\dfrac{(a-4)^2}{8}$

$2\leqq a<4$ のとき、M が最小になるのは、$-f\left(\dfrac{a}{2}\right)=f(0)$ のときで、

$b+\dfrac{a^2}{4}=-b\quad 2b=-\dfrac{a^2}{4}\quad b=-\dfrac{a^2}{8}\quad \therefore M=\dfrac{a^2}{8}$



グラフより、M は $a=2$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。このとき、$b=-\dfrac{1}{2}$ である。

以上により、M を最小にする $a,\ b$ は　$\therefore a=2,\ b=-\dfrac{1}{2}$　……(答)