1964 年京大理 $\boxed{5}$

（イ）

$$f_n(x)=\cos\left(x+\frac{a_{n+1}+a_n}{2}\right)\sin\frac{a_{n+1}-a_n}{2}=\left(\cos x\cos\frac{a_{n+1}+a_n}{2}-\sin x\sin\frac{a_{n+1}+a_n}{2}\right)\sin\frac{a_{n+1}-a_n}{2}$$
$$=\left(\cos\frac{a_{n+1}+a_n}{2}\sin\frac{a_{n+1}+a_n}{2}\right)\cos x-\left(\sin\frac{a_{n+1}+a_n}{2}\sin\frac{a_{n+1}+a_n}{2}\right)\sin x$$
$$=\frac{1}{2}(\sin a_{n+1}-\sin a_n)\cos x+\frac{1}{2}(\cos a_{n+1}-\cos a_n)\sin x$$

$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1}f_k(x)$ とすると

$$S_n(x)=\frac{1}{2}\cos x\sum_{k=1}^{n-1}(\sin a_{k+1}-\sin a_k)+\frac{1}{2}\sin x\sum_{k=1}^{n-1}(\cos a_{k+1}-\cos a_k)$$
$$=\frac{1}{2}(\sin a_n-\sin a_1)\cos x+\frac{1}{2}(\cos a_n-\cos a_1)\sin x$$

$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$ であるから、すべての x について収束するには、$\sin a_n$ と $\cos a_n$ が収束する必要がある。

逆に、$\sin a_n$ と $\cos a_n$ が収束すれば、$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ も収束する。

したがって、$\sin a_n$ と $\cos a_n$ が収束することが、必要十分である。……(答)

（ロ）

$n\to\infty$ のとき、$\sin a_n\to A,\ \cos a_n\to B$ とすると　$F(x)=\frac{1}{2}(A-\sin a_1)\cos x+\frac{1}{2}(B-\cos a_1)\sin x$ ……(答)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(x)dx=\frac{1}{2}(A-\sin a_1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+\frac{1}{2}(B-\cos a_1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{1}{2}(A-\sin a_1)[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}(B-\cos a_1)[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}(A-\sin a_1)+\frac{1}{2}(B-\cos a_1)=\frac{1}{2}(A+B-\sin a_1-\cos a_1)$$

同様に、$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx=\frac{1}{2}(\sin a_{n+1}-\sin a_n)+\frac{1}{2}(\cos a_{n+1}-\cos a_n)$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(\sin a_{k+1}-\sin a_k)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(\cos a_{k+1}-\cos a_k)=\frac{1}{2}(\sin a_n-\sin a_1)+\frac{1}{2}(\cos a_n-\cos a_1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx\right)=\frac{1}{2}(A-\sin a_1)+\frac{1}{2}(B-\cos a_1)=\frac{1}{2}(A+B-\sin a_1-\cos a_1)$$

したがって　$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx\right)$ ……(答)