1964年京大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

(1)

一般に、正の2数a, bについて、$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqq 0$より、$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$が成立する。

等号成立は$a=b$のとき。

これより

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}\right)\geqq\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}\geqq\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

等号成立は$a_1=a_2,\ a_3=a_4$かつ$a_1a_2=a_3a_4$のときで、結局$a_1=a_2=a_3=a_4$のとき。(証明終)

(2)

(1)より　$\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2}{b_2}+\dfrac{a_3}{b_3}+\dfrac{a_4}{b_4}\geqq 4\sqrt[4]{\dfrac{a_1a_2a_3a_4}{b_1b_2b_3b_4}}$

順番を入れ替えても積は同じで、$a_1a_2a_3a_4=b_1b_2b_3b_4$であるから　$\therefore\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2}{b_2}+\dfrac{a_3}{b_3}+\dfrac{a_4}{b_4}\geqq 4$

等号成立は$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=\dfrac{a_4}{b_4}=1$のとき、すなわち$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3,\ a_4=b_4$のとき。(証明終)