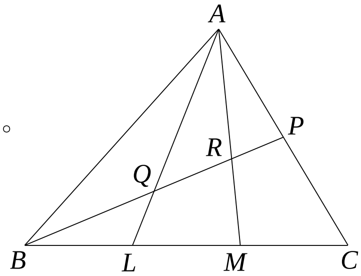
1964年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

（イ）

$\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AC}\ (0<p<1)$とする。



$BQ:QP=k:(1-k)$とすると　$\overrightarrow{AQ}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AP}=(1-k)\overrightarrow{AB}+kp\overrightarrow{AC}$ ——①

$\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$であるから、$\overrightarrow{AQ}=q\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}q\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}q\overrightarrow{AC}$ ——②　と書ける。

①、②より　$1-k=\frac{2}{3}q,\ kp=\frac{1}{3}q$　qを消去して　$1-k=2kp$　$\therefore k=\frac{1}{2p+1}$

$PR:RB=l:(1-l)$とすると　$\overrightarrow{AR}=(1-l)\overrightarrow{AP}+l\overrightarrow{AB}=l\overrightarrow{AB}+(1-l)p\overrightarrow{AC}$ ——③

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$であるから、$\overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}r\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}r\overrightarrow{AC}$ ——④　と書ける。

③、④より　$l=\frac{1}{3}r,\ (1-l)p=\frac{2}{3}r$　rを消去して　$2l=(1-l)p$　$\therefore l=\frac{p}{p+2}$

以上により

$$BQ:QR:RP=\frac{1}{2p+1}:\left(1-\frac{1}{2p+1}-\frac{p}{p+2}\right):\frac{p}{p+2}=(p+2):((2p+1)(p+2)-(p+2)-p(2p+1)):p(2p+1)$$
$$=(p+2):3p:p(2p+1)$$

$(p+2)-3p=2(1-p)>0$　$3p-p(2p+1)=2p(1-p)>0$

したがって　$p+2>3p>p(2p+1)$　$\therefore BQ>QR>RP$ ……(答)

（ロ）

$BQ<QR+RP$が成り立てばよいから

$p+2<3p+p(2p+1)$　$2p^2+3p-2>0$　$(2p-1)(p+2)>0$　$\therefore p>\frac{1}{2}$

したがって、点Pの範囲は、ACの中点とCの間である。……(答)

ただし、ACの中点は含まない。