1965年京大文 $\boxed{6}$

$$ax^2+2ay^2+z^2-xy-yz-zx$$
$$=\left(z-\frac{x+y}{2}\right)^2-\frac{(x+y)^2}{4}+ax^2+2ay^2-xy=\left(z-\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(a-\frac{1}{4}\right)x^2+\left(2a-\frac{1}{4}\right)y^2-\frac{3}{2}xy$$
$$\geqq\left(a-\frac{1}{4}\right)x^2+\left(2a-\frac{1}{4}\right)y^2-\frac{3}{2}xy$$

常に $ax^2+2ay^2+z^2-xy-yz-zx\geqq 0$ となるには

$$\left(a-\frac{1}{4}\right)x^2+\left(2a-\frac{1}{4}\right)y^2-\frac{3}{2}xy\geqq 0\quad \therefore (4a-1)x^2+(8a-1)y^2-6xy\geqq 0 \quad \text{——①}$$

①において、$x=0$ のとき　$(8a-1)y^2\geqq 0$　$y=0$ のとき　$(4a-1)x^2\geqq 0$

$8a-1\geqq 0,\ 4a-1\geqq 0$ より、結局　$\therefore a\geqq\frac{1}{4}$　$8a-1>0$ であるから

$$(4a-1)x^2+(8a-1)y^2-6xy$$
$$=(8a-1)\left(y^2-\frac{6}{8a-1}xy\right)+(4a-1)x^2=(8a-1)\left(y-\frac{3}{8a-1}x\right)^2+\left(4a-1-\frac{9}{8a-1}\right)x^2$$
$$\geqq\left(4a-1-\frac{9}{8a-1}\right)x^2$$

常に $(4a-1)x^2+(8a-1)y^2-6xy\geqq 0$ となるには

$$4a-1-\frac{9}{8a-1}\geqq 0\quad (4a-1)(8a-1)-9\geqq 0\quad 32a^2-12a-8\geqq 0\quad 8a^2-3a-2\geqq 0$$
$$8\left(a-\frac{3-\sqrt{73}}{16}\right)\left(a-\frac{3+\sqrt{73}}{16}\right)\geqq 0\quad \therefore a\leqq\frac{3-\sqrt{73}}{16},\ \frac{3+\sqrt{73}}{16}\leqq a$$

$a\geqq\frac{1}{4}$ であるから　$\therefore a\geqq\frac{3+\sqrt{73}}{16}$　……(答)