1965 年京大理 $\boxed{6}$

$\int_1^x (x-t)f(t)dt = x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x t f(t)dt$ であるから、

$x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x t f(t)dt = x^4 - 2x^2 + 1$ の両辺を微分すると　$\int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_1^x f(t)dt = 4x^3 - 4x$

さらに、$\int_1^x f(t)dt = 4x^3 - 4x$ の両辺を微分すると　$f(x) = 12x^2 - 4$

元の式に代入すると

$$\begin{aligned}\int_1^x (x-t)f(t)dt &= x\int_1^x (12t^2-4)dt - \int_1^x (12t^3-4t)dt = x\left[4t^3-4t\right]_1^x - \left[3t^4-2t^2\right]_1^x = x(4x^3-4x) - (3x^4-2x^2-1) \\ &= x^4 - 2x^2 + 1\end{aligned}$$

確かに成立するので　$\therefore f(t) = 12t^2 - 4$ ……(答)