

1965 年京大理 1 文 1 共通 ※2017. 12. 15 赤字の箇所を追記、訂正。

(弟) きょう、学校で数学のテストがありました。命題がいくつかあって、正しいものに○印を、正しくないものには×印をつける問題でした。全部できたつもりです。

(姉) それは、よかったですね。その中の一つをいってごらん。

(弟) こんなのがありました。

「二直線 $y+k(x-2)=0$ ……(1)、 $ky-(x+2)=0$ ……(2)の交点は、 k がどんな実数値をとっても、円 $x^2+y^2-4=0$ ……(3)の上にある」
というのです。もちろん、○印をつけました。

(姉) なぜ、これが正しいことがわかりましたか。

(弟) (1)、(2)から k を消去したら、(3)がでるからです。それでいいでしょう。

(姉) 結構ですね。しかし、この問題が本当によくわかっているかどうか、二、三質問をしてみましょう。まず、この命題に二直線とあるのは、もちろん (x, y) 平面上の二直線のことですね。では、 k はどういうものですか。

(弟) k は実数値をとる変数です。したがって、それに応じて、方程式(1)、(2)の係数がきまって、それぞれのあらかず直線がきまります。すなわち、それに対応する二直線が動きます。

(姉) ところで、二直線の交点とありますが、 k の値によっては、この二直線が垂直になることはないのかしら。

(弟) いや、それどころか、いつでも直交します。

(姉) どうして。

(弟) $k \neq 0$ のときには、二直線の方向係数は、それぞれ $-k$ 、 $\frac{1}{k}$ ですが、 $-k \cdot \frac{1}{k} = -1$ ですから、直交の条件を満たします。

$k = 0$ のときには、(1)は y 軸と直交し、(2)は y 軸と平行ですから、やはり、(1)、(2)は直交します。

(姉) うまく証明しましたね。では、本題にはいって、(1)、(2)から k を消去して、(3)がでたことから、(1)、(2)の交点が(3)の上にあると結論したのは、どういう理由ですか。

(弟) 僕は、こういう問題は消去するものと覚えこんでいただけで、理由なんて考えてみたこともありません。教えてください。

(姉) では、 k を消去したときに、(3)の左辺をどのようにして、(1)、(2)の左辺からだしたか、まず、それを式でかいてごらん。

(弟) $x^2 + y^2 - 4 = y\{y+k(x-2)\} - (x-2)\{ky-(x+2)\}$ ……(4)です。

(姉) ここにあなたがかいた等式(4)は、等式(1)、(2)、(3)と性格がちがいますね。

(弟) (1)、(2)、(3)は方程式ですが、(4)は恒等式です。

(姉) そのことを心にとめておいて、(1)、(2)の交点が、(3)の上にあることを証明しましょう。

(a, b) が(1)、(2)の交点であるとするれば $x=a, y=b$ は((4)の右辺)=0を満たす。次に、いま注意したことから、 $x=a, y=b$ は、もちろん((4)の左辺)=0を満たす。この二つのことから、 $x=a, y=b$ は(3)を満たし、 (a, b) が(3)の上にあることがわかる。
というわけです。

(弟) なるほど、これで、消去の意味がよくわかりました。ところで、姉さん。 k がすべての実数値をとるとき、この交点は(3)式の円をえがくのですか。

(姉) この交点のえがく円は、幾何では、交点の軌跡といいますね。これを α とし、(3)式の円を β とすると、いままで話しあったことから、 α は β と一致するか、または α は β の一部であることがわかりますね。実際は、 α は β から点(2, 0)を除いたものです。証明は、ゆっくりあとで考えてごらん。

※埋めるだけ埋めてみましたが、正しいかは保証できません。