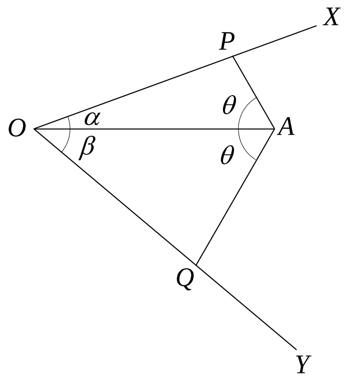
1965 年京大理 $\boxed{4}$ 文 $\boxed{4}$ 共通



$\angle XOA=\alpha,\ \angle YOA=\beta\ (\alpha+\beta<\pi)$ とする。2 点 $P,\ Q$ がある位置にきたとき、$\angle OAP=\angle OAQ=\theta$ となったとする。

$\triangle OAP$ に対する正弦定理により　$\dfrac{OP}{\sin\theta}=\dfrac{OA}{\sin(\pi-\theta-\alpha)}=\dfrac{OA}{\sin(\theta+\alpha)}$

$\triangle OAQ$ に対する正弦定理により　$\dfrac{OQ}{\sin\theta}=\dfrac{OA}{\sin(\pi-\theta-\beta)}=\dfrac{OA}{\sin(\theta+\beta)}$

常に $OP=OQ$ であるから　$\dfrac{OA}{\sin(\theta+\alpha)}=\dfrac{OA}{\sin(\theta+\beta)}$　$\therefore\sin(\theta+\alpha)=\sin(\theta+\beta)$ ――①

$OA,\ \alpha,\ \beta$ は定数であり、①により θ が定まれば、$\angle OAP=\angle OAQ$ となる 2 点 $P,\ Q$ の位置が、1 通りに定まる。すなわち、①を満たす相違なる θ が 2 個以上存在すれば、$\angle OAP=\angle OAQ$ となる 2 点 $P,\ Q$ の位置が、2 通り以上存在する。

①を満たす θ の個数を考える。$\sin(\theta+\alpha)-\sin(\theta+\beta)=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$ より

$\alpha\neq\beta$ のとき、$-\pi<\alpha-\beta<\pi$ であるから、$\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\neq0$ であり、$\cos\left(\theta+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$ でなければならない。

$0<\theta<\pi,\ 0<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$0<\theta+\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\dfrac{3}{2}\pi$　$\theta+\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$　$\therefore\theta=\dfrac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}$

$\alpha\neq\beta$ のとき、①を満たす θ は 1 個のみであるから、$\angle OAP=\angle OAQ$ となる 2 点 $P,\ Q$ の位置は、1 通りのみである。

したがって、$\angle OAP=\angle OAQ$ となる 2 点 $P,\ Q$ の位置が、2 通り以上存在するならば、$\alpha=\beta$ である。
すなわち、点 A は、$\angle XOY$ の二等分線上にある。(証明終)