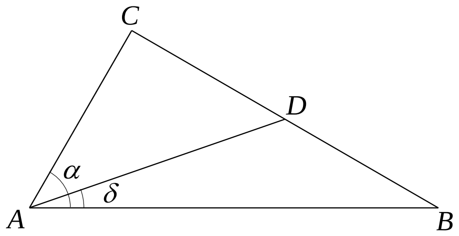
1966 年京大文 $\boxed{6}$

（i）



△ ABDの面積は　$\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin\delta = AC\cdot AD\sin\delta$

$\angle CAD=\alpha-\delta$であるから、△ ACDの面積は　$\dfrac{1}{2}AC\cdot AD\sin(\alpha-\delta)$

$BD=CD$であるから、△ ABDの面積と△ ACDの面積は等しい。

$AC\cdot AD\sin\delta=\dfrac{1}{2}AC\cdot AD\sin(\alpha-\delta)$　　$\therefore \sin(\alpha-\delta)=2\sin\delta$　（証明終）

（ii）

（i）で示した式より　$\sin(\alpha-\delta)=2\sin\delta<1$　$\sin\delta<\dfrac{1}{2}$　$\delta<\dfrac{\pi}{6}$　$\therefore 3\delta<\dfrac{\pi}{2}$　3δは鋭角である。

$3\delta<\alpha<4\delta$が成り立つとき　$2\delta<\alpha-\delta<3\delta<\dfrac{\pi}{2}$　$\sin 2\delta<\sin(\alpha-\delta)<\sin 3\delta$

（i）で示した式を代入すると　$\therefore \sin 2\delta<2\sin\delta<\sin 3\delta$ ――①　①が成り立つことを示せばよい。

左側の不等式について　$2\sin\delta-\sin 2\delta=2\sin\delta-2\sin\delta\cos\delta=2\sin\delta(1-\cos\delta)>0$　$\therefore \sin 2\delta<2\sin\delta$

次に、$\sin 3\delta=\sin 2\delta\cos\delta+\cos 2\delta\sin\delta=2\sin\delta(1-\cos^2\delta)+(1-2\sin^2\delta)\sin\delta=3\sin\delta-4\sin^3\delta$であるから、
右側の不等式について

$\sin 3\delta-2\sin\delta=\sin\delta-4\sin^3\delta=\sin\delta(1+2\sin\delta)(1-2\sin\delta)>0$　$\therefore 2\sin\delta<\sin 3\delta$

以上により、①が成り立つから、$3\delta<\alpha<4\delta$が示された。（証明終）