1966年京大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

（i）

$f(x)=x^3+x-8$ とすると、 $f'(x)=3x^2+1>0$ であるから、 $f(x)$ は単調増加である。
$f(1)=-6<0,\ f(2)=2>0$ であるから、 $f(x)=0$ は、ただ1つの実根を、1と2の間に持つ。（証明終）

（ii）

$f(x)=0$ の実根は有理数であると仮定し、 $x=\dfrac{q}{p}$ とする。 $p,\ q$ は互いに素な自然数である。

代入すると　$\dfrac{q^3}{p^3}+\dfrac{q}{p}-8=0$　$q^3+p^2q==8p^3$　$q(p^2+q^2)=8p^3$ ――①
①より、 p, q は互いに素であるから、q は8の約数である。したがって、 $q=1,\ 2,\ 4,\ 8$ のいずれかである。

$q=1$ のとき　$p^2+1=8p^3$　$1=8p^3-p^2=p^2(8p-1)$　p^2 は1の約数であるから、 $p=1$ であるが、不適。
$q=2$ のとき　$2p^2+8=8p^3$　$4=p^2(4p-1)$
　ここで、左辺は $4=2^2$ であり、奇数の約数を持たないが、右辺は奇数 $4p-1$ を約数に持つので、不適。
$q=4$ のとき　$4p^2+64=8p^3$　$16=p^2(2p-1)$
　ここで、左辺は $16=2^4$ であり、奇数の約数を持たないが、右辺は奇数 $2p-1$ を約数に持つので、不適。
$q=8$ のとき　$8p^2+512=8p^3$　$64=p^2(p-1)$
　ここで、左辺は $64=2^6$ であり、奇数の約数を持たないが、 p と $p-1$ の一方は奇数であるから、右辺は奇数を約数に持つので、不適。

いずれにしても不適であるから、 $f(x)=0$ の実根は有理数であるという仮定は誤りである。
以上により、 $f(x)=0$ の実根は無理数であることが示された。（証明終）