1966年京大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

（i）

（イ）

平行四辺形$ABCD$の内部に、△PQRが存在し、P, Q, Rはいずれも平行四辺形$ABCD$の周上にないとする。

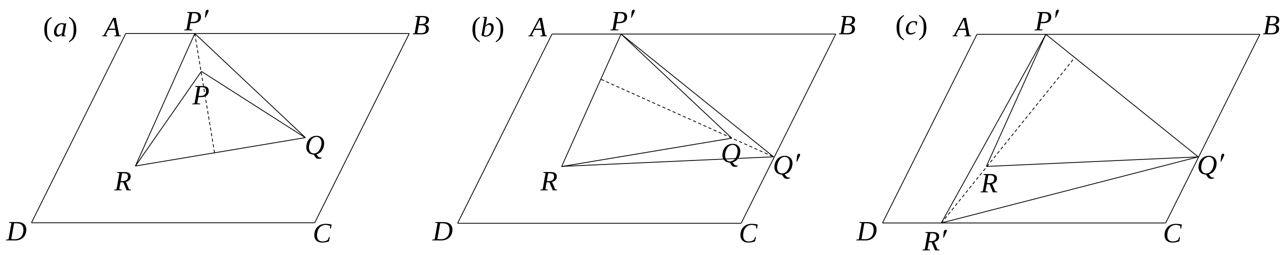
また、例えば△PQRの面積を、(△PQR)と表すことにする。

(a) 辺QRと垂直で、Pを通る直線を引き、平行四辺形$ABCD$の周と交差する点のうち、QRから見て遠い方をP'とする。このとき、(△PQR) < (△$P'QR$)である。

(b) 辺$P'R$と垂直で、Qを通る直線を引き、平行四辺形$ABCD$の周と交差する点のうち、$P'R$から見て遠い方をQ'とする。このとき、(△$P'QR$) < (△$P'Q'R$)である。

(c) 辺$P'Q'$と垂直で、Rを通る直線を引き、平行四辺形$ABCD$の周と交差する点のうち、$P'Q'$から見て遠い方をR'とする。このとき、(△$P'Q'R$) < (△$P'Q'R'$)である。

以上により、P, Q, Rのうち1点でも平行四辺形$ABCD$の周上にないとき、3点とも平行四辺形$ABCD$の周上にあって、なおかつ面積が大きい三角形が必ず存在する。(△PQR)が最大になるのは、3点P, Q, Rがいずれも平行四辺形$ABCD$の周上にあるときである。（証明終）



（ロ）

(a)3点P, Q, Rのうち2点が、平行四辺形$ABCD$の同一辺上にあり、もう1点は対辺上にあるとき

(△PQR) < (△PCD)

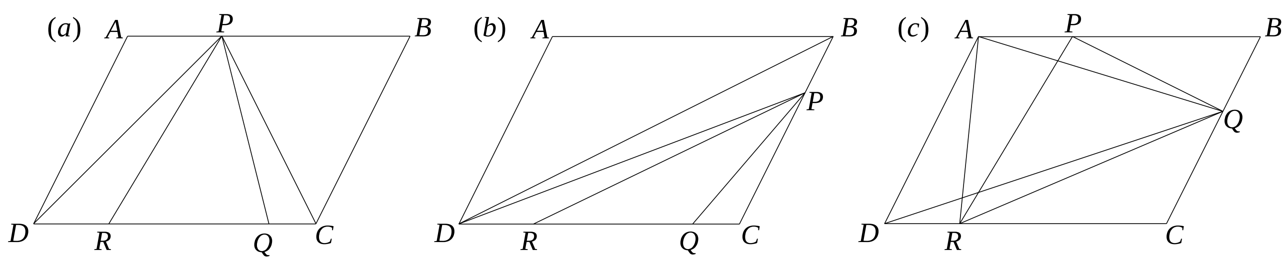
(b)3点P, Q, Rのうち2点が、平行四辺形$ABCD$の同一辺上にあり、もう1点は隣接辺上にあるとき

(△PQR) < (△PCD) < (△BCD)

(c)3点P, Q, Rのうちいずれの2点も、平行四辺形$ABCD$の同一辺上にないとき

(△PQR) < (△AQR) < (△AQD)

したがって、△PQRの少なくとも一辺は、平行四辺形$ABCD$の一辺と一致する。（証明終）



（ii）

(i)より、平行四辺形$ABCD$の中に入っている最大面積の三角形は、一辺または隣接した二辺を、平行四辺形$ABCD$と共有しており、面積は平行四辺形$ABCD$の半分である。

したがって、面積が2より小さい平行四辺形の中に、面積1の三角形は、入れない。（証明終）