1967 年京大文 $\boxed{6}$ 新

※2017. 10. 4 訂正。

(i)

4 人を 1 人と 3 人に分けるか、2 人ずつに分けるか、いずれかであるから　2 通り ……(答)

(ii)

ボートを A, B とすると

A に 3 人・B に 1 人、A に 1 人・B に 3 人、A に 2 人・B に 2 人のいずれかであるから　3 通り ……(答)

(iii)

人を①②③④とすると

A に 1 人・B に 3 人の場合、A に乗る 1 人の決め方は 4 通り。A に 3 人・B に 1 人の場合も同じ。

A に 2 人・B に 2 人の場合、A に乗る 2 人を決めて、残りを B に乗せればよいから　${}_4C_2=6$ 通り

以上により　$4+4+6=14$ 通り ……(答)

(iv)

A に 1 人・B に 3 人の場合

人の分け方は 4 通りで、A に乗った 1 人の乗り方は 3 通り、B に乗った 3 人の乗り方は $3!=6$ 通り

A に 1 人・B に 3 人の場合の乗り方は　$4\times3\times6=72$ 通り

A に 3 人・B に 1 人の場合の乗り方も、同じく 72 通り。

A に 2 人・B に 2 人の場合

人の分け方は 6 通りで、A, B とも 2 人の乗り方は、それぞれ $3\times2=6$ 通り。

A に 2 人・B に 2 人の場合の乗り方は　$6\times6\times6=216$ 通り

以上により　$72+72+216=360$ 通り ……(答)

(iv) の別解

6 つの区別される席に、①②③④が順に空席に座っていくと考えれば　$6\times5\times4\times3=360$ 通り ……(答)

4 人が座る順が一定ならば、重複はない。

1967 年京大文 $\boxed{6}$ 旧

（i）

$f(t)=\dfrac{c^2t^2+d^2}{t}=c^2t+\dfrac{d^2}{t}$ であるから、相加平均・相乗平均の関係より　$f(t)\geqq 2\sqrt{c^2t\cdot\dfrac{d^2}{t}}=2\sqrt{c^2d^2}=2cd$

等号成立は、$c^2t=\dfrac{d^2}{t}$ のときであるから　$t^2=\dfrac{d^2}{c^2}$　$\therefore t=\dfrac{d}{c}$　したがって、$t=\dfrac{d}{c}$ のとき最小。(証明終)

（ii）

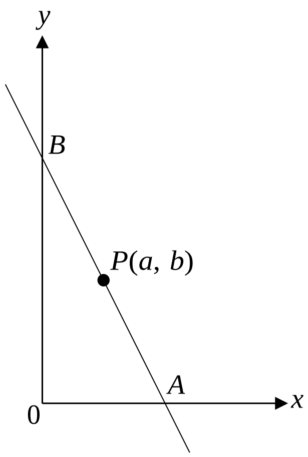
$P(a,\ b)$ を通り、傾きが $k\ (k<0)$ の直線の方程式は　$y=k(x-a)+b$

x 軸との交点は　$0=k(x-a)+b$　$kx=ka-b$　$x=a-\dfrac{b}{k}>0$

y 軸との交点は　$y=-ka+b>0$

△ OAB の面積は

$$S=\frac{1}{2}\left(a-\frac{b}{k}\right)(-ka+b)=\frac{1}{2}\frac{(-ka+b)^2}{(-k)}=\frac{1}{2}\frac{(-k)^2a^2+b^2-2kab}{(-k)}=\frac{1}{2}\frac{(-k)^2a^2+b^2}{(-k)}+ab$$



$-k>0$ であり、(i)の $f(t)$ によって $S=\dfrac{1}{2}f(-k)+ab$ と表せるから、

S が最小になる傾きは　$-k=\dfrac{b}{a}$　$\therefore k=-\dfrac{b}{a}$ ……(答)

※もちろん、微分法で解いてもよい。