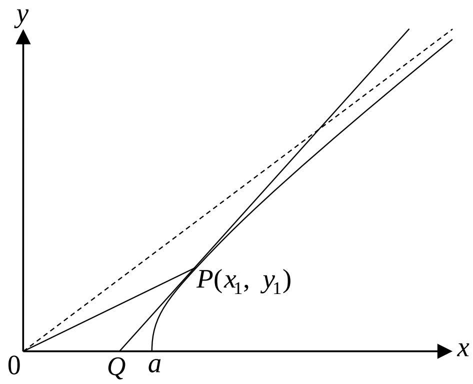
1967 年京大理 $\boxed{3}$

（i）

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $P(x_1,\ y_1)$ における接線を考える。



x で微分すると　$\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$　$y\neq 0$ のとき　$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{a^2y}$

$y_1>0$ のとき、P における接線 l は

$$y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)+y_1 \quad \therefore \frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}=1$$

l と x と軸との交点は $Q\left(\dfrac{a^2}{x_1},\ 0\right)$ であるから、$OQ=\dfrac{a^2}{x_1}$ である。

$\triangle OPQ$ の面積は、$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{x_1}\cdot y_1$ で与えられる。y_1 を求めると

$$\frac{y_1{}^2}{b^2}=\frac{x_1{}^2}{a^2}-1 \quad y_1{}^2=\frac{b^2}{a^2}(x_1{}^2-a^2) \quad \therefore y_1=\frac{b}{a}\sqrt{x_1{}^2-a^2}$$

$\triangle OPQ$ の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{x_1}\cdot\dfrac{b}{a}\sqrt{x_1{}^2-a^2}=\dfrac{1}{2}ab\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x_1{}^2}}$　……(答)

（ii）

（i）より、$x_1\to+\infty$ のとき、求める極限値は　$\dfrac{1}{2}ab$　……(答)