1967 年京大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

（i）

$f(x)=x(x-3)(x+3)+3k(x-1)(x+1)$ とする。

$f(-1)=8>0,\ f(0)=-3k<0,\ f(3)=24k>0$ であるから、関数の連続性により、 $f(x)=0$ は、 $-1<x<0,\ 0<x$ において、それぞれ実根を持つ。

また、 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3\left\{\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)+\frac{3k}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}=-\infty$ であるから、 $f(x)=0$ は $x<-1$ においても実根を持つ。以上により、 $f(x)=0$ は 3 つの相違なる実根を持つ。（証明終）

（ii）

（i）の議論により、 $f(x)=0$ が $x>0$ の範囲に持つ実根は、ただ 1 つである。（証明終）

$f(1)=-8<0$ であるから、 $f(x)=0$ の正の根は、$1<x$ の範囲にある。

一方、

$$f\left(1+\frac{2}{k}\right)=\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(-2+\frac{2}{k}\right)\left(4+\frac{2}{k}\right)+3k\cdot\frac{2}{k}\left(2+\frac{2}{k}\right)=\frac{4(k+2)(1-k)(2k+1)+12k^2(k+1)}{k^3}$$

$$=\frac{4(-2k^3-3k^2+3k+2+3k^3+3k^2)}{k^3}=\frac{4(k^3+3k+2)}{k^3}>0$$

であるから、 $f(x)=0$ の正の根は、 $x<1+\dfrac{2}{k}$ の範囲にある。以上により示された。（証明終）

（注）

特に理系の受験生は、定数分離をしたくなるかもしれないが、実は微分法すら必要ない。

以下に、定数分離を用いた解答を示すが、面倒である。

（i）

$x=\pm1$ は与式を満たさないので、 $k=\dfrac{x(x-3)(x+3)}{3(1-x)(1+x)}=\dfrac{x^3-9x}{3(1-x^2)}$ として考えてよい。 $f(x)=\dfrac{x^3-9x}{3(1-x^2)}$ とすると

$$f'(x)=\frac{(3x^2-9)(1-x^2)+(x^3-9x)2x}{3(1-x^2)^2}=\frac{-3x^4+12x^2-9+2x^4-18x^2}{3(1-x^2)^2}=-\frac{x^4+6x^2+9}{3(1-x^2)^2}=-\frac{(x^2+3)^2}{3(1-x^2)^2}<0$$

$$f''(x)=-\frac{2(x^2+3)\cdot2x\cdot(1-x^2)^2+(x^2+3)^2\cdot2(1-x^2)\cdot2x}{3(1-x^2)^4}=-\frac{4x(x^2+3)(1-x^2)+4x(x^2+3)^2}{3(1-x^2)^3}=\frac{16x(x^2+3)}{3(x^2-1)^3}$$

$f(x)$ の増減、凹凸は右の通り。

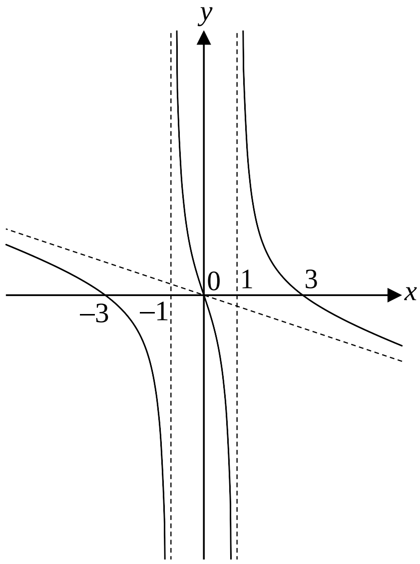
$f(x)=\dfrac{x^3-9x}{3(1-x^2)}=-\dfrac{x(x^2-1)-8x}{3(x^2-1)}=-\dfrac{x}{3}+\dfrac{8x}{3(x^2-1)}$ より、

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ である。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	$-$	$-$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↘		↘		↘

$y=f(x)$ のグラフの概形は、 $x=\pm1,\ y=-\dfrac{x}{3}$ が漸近線になるから、

右図のようになる。
このグラフと、直線 $y=k$ は必ず 3 つの共有点を持つから、
題意は示された。(証明終)



(ii)
(i)のグラフより、 $y=f(x)$ と $y=k\,(>0)$ の、 $x>0$ なる共有点はただ 1 つであり、なおかつ $x>1$ の範囲にある。
この共有点が $x<1+\dfrac{2}{k}$ の範囲にあるとき、 $f\left(1+\dfrac{2}{k}\right)<k$ が成り立つ。

$$f\left(1+\frac{2}{k}\right)=\frac{\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(-2+\frac{2}{k}\right)\left(4+\frac{2}{k}\right)}{3\left(-\frac{2}{k}\right)\left(2+\frac{2}{k}\right)}=\frac{\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(-1+\frac{1}{k}\right)\left(2+\frac{1}{k}\right)}{3\left(-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)}=\frac{(k+2)(k-1)(2k+1)}{3k(k+1)}$$

$$f\left(1+\frac{2}{k}\right)-k=\frac{(k+2)(k-1)(2k+1)}{3k(k+1)}-k=\frac{2k^3+3k^2-3k-2-(3k^3+3k^2)}{3k(k+1)}=-\frac{k^3+3k+2}{3k(k+1)}<0$$

したがって、 $f\left(1+\dfrac{2}{k}\right)<k$ が成り立つから、題意は示された。(証明終)