1968 年京大文 $\boxed{6}$

$y=x^3$ と、 $y=ax^2+bx+c$ が、点 $(1,1)$ において共通接線を持つ。

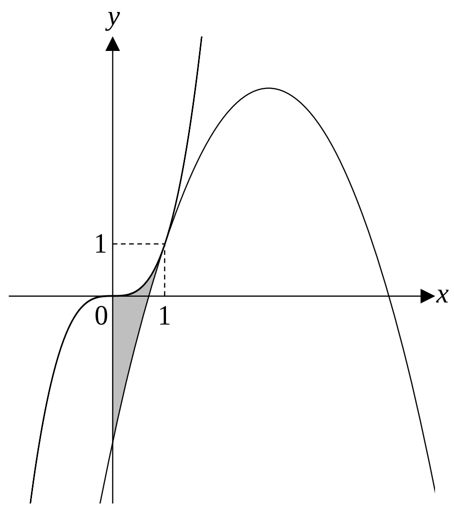
$f(x)=x^3,\ g(x)=ax^2+bx+c$ とすると　$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=2ax+b$

$f(1)=g(1)$ より　$a+b+c=1$　$f'(1)=g'(1)$ より　$2a+b=3$　$b=3-2a$

$c=1-a-b$ より　$c=1-a-b=1-a-(3-2a)=a-2$

$y=ax^2+bx+c$ は上に凸であるから、図示すると右図のようになる。

2 つのグラフと y 軸で囲まれた、 $x\geqq 0$ の部分の面積は



$$\int_0^1\left\{x^3-(ax^2+bx+c)\right\}dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{2}x^2-cx\right]_0^1=\frac{1}{4}-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-c$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{a}{3}-\frac{3-2a}{2}-(a-2)=-\frac{a}{3}+\frac{3}{4}=1$$

$$-\frac{a}{3}=\frac{1}{4}\quad\therefore a=-\frac{3}{4}$$

$b=3-2a,\ c=a-2$ より　$\therefore a=-\dfrac{3}{4},\ b=\dfrac{9}{2},\ c=-\dfrac{11}{4}$　……(答)