1969 年京大文 $\boxed{4}$

A_1 から反時計回りに、各頂点を $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n$ とする。

頂点 $A_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の偏角は、$\dfrac{2\pi(k-1)}{n}$ で与えられるので、$Z_k=\cos\dfrac{2\pi(k-1)}{n}+i\sin\dfrac{2\pi(k-1)}{n}$ と書ける。

ここで、$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ であることを、数学的帰納法で示す。$n=1$ のとき成立。

$n=k$ のとき、$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$ と仮定すると

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}&=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)\end{aligned}$$

三角関数の加法定理により　$\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta=\cos(k+1)\theta,\ \sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta=\sin(k+1)\theta$

$$\therefore (\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$$

したがって、$n=k+1$ のときも成立。

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ を用いれば　$\therefore (Z_k)^n=\cos 2\pi(k-1)+i\sin 2\pi(k-1)=1$　（証明終）