1970 年京大理 $\boxed{6}$ 文 $\boxed{6}$（ほぼ）共通

（イ）

$1<a<2$ であるから、$x_2=\dfrac{a^2+2}{3}$ より　$\therefore 1<x_2$

$a-x_2=a-\dfrac{a^2+2}{3}=-\dfrac{a^2-3a+2}{3}=-\dfrac{(a-1)(a-2)}{3}$ より　$a-x_2>0$　$\therefore x_2<a$

したがって、$1<x_2<a$ であり、$n=2$ のとき成立。

$n=k$ のとき、$1<x_k<a$ と仮定すると、$x_{k+1}=\dfrac{{x_k}^2+2}{3}$ より　$\therefore 1<x_{k+1}$

$a-x_{k+1}=a-\dfrac{{x_k}^2+2}{3}>a-\dfrac{a^2+2}{3}=-\dfrac{(a-1)(a-2)}{3}>0$ より　$a-x_{k+1}>0$　$\therefore x_{k+1}<a$

したがって、$1<x_{k+1}<a$ であり、$n=k+1$ のときも成立。

以上により、（イ）が示された。（証明終）

（ロ）

$n\geqq 2$ のとき　$x_n-1=\dfrac{{x_{n-1}}^2+2}{3}-1=\dfrac{{x_{n-1}}^2-1}{3}=\left(\dfrac{x_{n-1}+1}{3}\right)(x_{n-1}-1)$

（イ）より、$x_{n-1}<a$ であるから　$x_n-1=\left(\dfrac{x_{n-1}+1}{3}\right)(x_{n-1}-1)<\left(\dfrac{a+1}{3}\right)(x_{n-1}-1)$

したがって、$x_n-1\leqq\left(\dfrac{a+1}{3}\right)(x_{n-1}-1)$ であり、（ロ）が示された。（証明終）

（ハ）

（ロ）を繰り返し用いると

$$x_n-1\leqq\left(\frac{a+1}{3}\right)(x_{n-1}-1)\leqq\left(\frac{a+1}{3}\right)^2(x_{n-2}-1)\leqq\cdots\leqq\left(\frac{a+1}{3}\right)^{n-1}(x_1-1)=\left(\frac{a+1}{3}\right)^{n-1}(a-1)$$

$$\therefore 0<x_n-1\leqq\left(\frac{a+1}{3}\right)^{n-1}(a-1)$$

$1<a<2$ より、$\dfrac{2}{3}<\dfrac{a+1}{3}<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a+1}{3}\right)^{n-1}(a-1)=0$

したがって、はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=0$　$\displaystyle\therefore\lim_{n\to\infty}x_n=1$　……（答）

※設問（イ）（ロ）は、文理共通。

　設問（ハ）は、理系は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ、文系は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ を示せ、となっている。