1971 年京大文 $\boxed{1}$

（i）

ア） $a=1$ イ） $\overline{OP}=\sqrt{2}$ ウ）増加　エ）減少

$xy=1$ に、$y=ax$ を代入すると　$ax^2=1$　$x^2=\dfrac{1}{a}$　$x>0$ より　$x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

P の座標は $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}},\ \sqrt{a}\right)$ であるから　$\overline{OP}^2=a+\dfrac{1}{a}$　$f(a)=a+\dfrac{1}{a}$ とすると

$f'(a)=1-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{(a+1)(a-1)}{a^2}$ より、$a>0$ における増減は右の通り。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

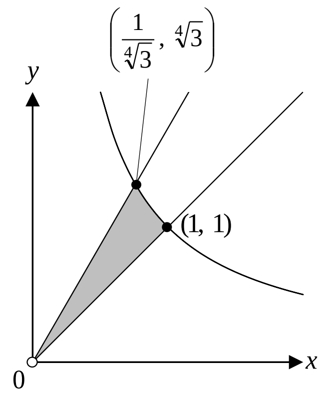
$a=1$ のとき最小となるから、このとき　$f(1)=2$　$\therefore \overline{OP}=\sqrt{2}$

$\overline{OP}$ の増減は $f(a)$ の増減と一致するから、

$a\geqq 1$ では、a が増加するとともに $\overline{OP}$ は増加し、$0<a<1$ では、a が増加するとともに $\overline{OP}$ は減少する。

（ii）

$0<y\leqq\dfrac{1}{x},\ x\leqq y\leqq\sqrt{3}x,\ x>0$ であるから、Q の存在範囲は右図の通り。



Q が直線 $y=ax(1\leqq a\leqq\sqrt{3})$ の $x>0$ の部分を動くとき、

$\overline{OQ}$ が最大になるのは、Q が $y=ax$ と $xy=1$ の交点であるときである。

次に、Q が $xy=1$ 上を動くとき、（i）の議論により、$\overline{OQ}$ が最大になるのは、

Q の座標が $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}},\ \sqrt[4]{3}\right)$ であるときである。

このとき　$\overline{OQ}=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$　……(答)

$\tan 60°=\sqrt{3}$ であるから、OQ が x 軸となす角は $60°$　……(答)