1971 年京大文$\boxed{3}$

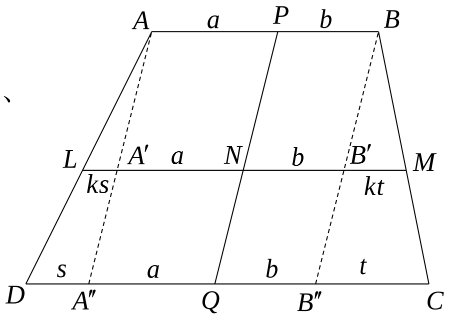
$a,\ x,\ c$ について、$a<x<c$ または $a=x=c$ または $a>x>c$ が成り立つ。
$b,\ y,\ d$ について、$b<y<d$ または $b=y=d$ または $b>y>d$ が成り立つ。

$\dfrac{d}{c}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{ad-bc}{ac}>0$ であるから、常に $\dfrac{d}{c}>\dfrac{b}{a}$ である。

（i）$a=x=c$ のとき

$ad-bc=a(d-b)>0$ より、$b<y<d$ でなければならない。$\dfrac{b}{a}<\dfrac{y}{a}<\dfrac{d}{a}$ であるから、$\dfrac{b}{a}<\dfrac{y}{x}<\dfrac{d}{c}$ が成立。

（ii）$a<x<c$ のとき
$0<ad-bc<c(d-b)$ より、$b<y<d$ でなければならない。
$A,\ B$ を通り、PQ に平行な直線を引き、それらと $LM,\ DC$ との交点を、右図のように定める。



$c=a+s\ (s>0),\ d=b+t\ (t>0)$ とすると
$ad-bc=a(b+t)-b(a+s)=at-bs>0$

相似性、平行性より、$PN:PQ=LA':DA''=MB':CB''$ であるから、
$x=a+ks,\ y=b+kt\ (0<k<1)$ とおける。

$$\frac{d}{c}-\frac{y}{x}=\frac{dx-cy}{cx}=\frac{(b+t)(a+ks)-(a+s)(b+kt)}{cx}=\frac{kbs+at-kat-bs}{cx}=\frac{(1-k)(at-bs)}{cx}>0$$

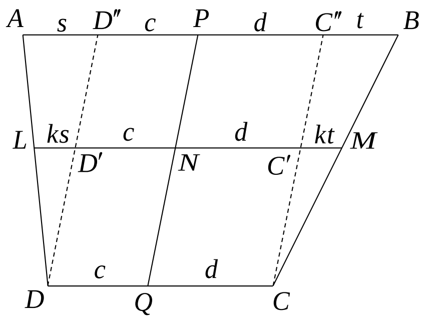
$$\frac{y}{x}-\frac{b}{a}=\frac{ay-bx}{ax}=\frac{a(b+kt)-b(a+ks)}{ax}=\frac{k(at-bs)}{ax}>0$$

したがって、$\dfrac{b}{a}<\dfrac{y}{x}<\dfrac{d}{c}$ が成立。

（iii）$a>x>c$ のとき

$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{c}$ であるから、$b<y<d$ または $b=y=d$ のとき、辺々かけると、$\dfrac{b}{a}<\dfrac{y}{x}<\dfrac{d}{c}$ が成立。

$b>y>d$ のとき
$C,\ D$ を通り、PQ に平行な直線を引き、それらと $LM,\ AB$ との交点を、右図のように定める。



$a=c+s\ (s>0),\ b=d+t\ (t>0)$ とすると
$ad-bc=(c+s)d-(d+t)c=ds-ct>0$

相似性、平行性より、$QN:QP=LD':AD''=MC':BC''$ であるから、
$x=a+ks,\ y=b+kt\ (0<k<1)$ とおける。

$$\frac{d}{c}-\frac{y}{x}=\frac{dx-cy}{cx}=\frac{d(c+ks)-c(d+kt)}{cx}=\frac{k(ds-ct)}{cx}>0$$

$$\frac{y}{x}-\frac{b}{a}=\frac{ay-bx}{ax}=\frac{(c+s)(d+kt)-(d+t)(c+ks)}{ax}=\frac{kct+ds-kds-ct}{ax}=\frac{(1-k)(ds-ct)}{ax}>0$$

したがって、$\frac{b}{a}<\frac{y}{x}<\frac{d}{c}$ が成立。

以上により、すべての場合について　$\therefore \frac{b}{a}<\frac{y}{x}<\frac{d}{c}$ ……(答)