1971年京大文 $\boxed{6}$

$f(x)=x^3-ax \quad f'(x)=3x^2-a$

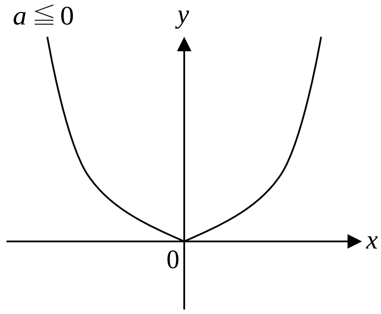
$a \leqq 0$ のとき　$f'(x) \geqq 0$ であるから、$f(x)$ は単調増加。

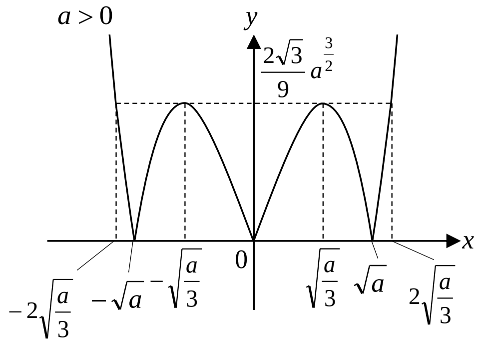
$a>0$ のとき　$f'(x)=3\left(x+\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)$　増減は右の通り。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

極大値は $f\left(-\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}$、極小値は $f\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}$。

$y=|f(x)|$ のグラフの概形は、
右図のようになる。





$0 \leqq x \leqq 1$ における、$|f(x)|$ の最大値を、$M(a)$ とすると

$a \leqq 0$ のとき　$M(a)=|f(1)|=|1-a|=-a+1\ (\because 1-a>0)$

$1 \leqq \sqrt{\dfrac{a}{3}}$　$3 \leqq a$ のとき　$M(a)=|f(1)|=|1-a|=a-1\ (\because 1-a<0)$

$\sqrt{\dfrac{a}{3}}<1 \leqq 2\sqrt{\dfrac{a}{3}}$　$\dfrac{3}{4} \leqq a<3$ のとき　$M(a)=\left|f\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)\right|=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}$

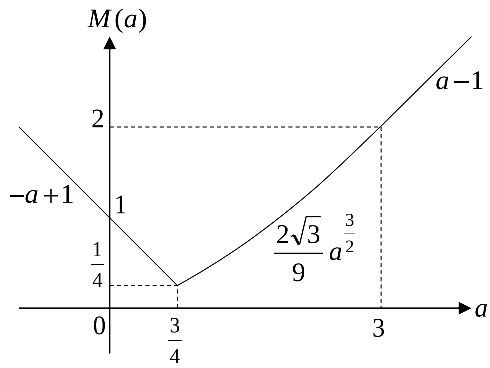
$2\sqrt{\dfrac{a}{3}}<1$　$0<a<\dfrac{3}{4}$ のとき　$M(a)=|f(1)|=|1-a|=-a+1\ (\because 1-a>0)$

以上まとめて

$a<\dfrac{3}{4}$ のとき　$M(a)=-a+1$

$\dfrac{3}{4} \leqq k<3$ のとき　$M(a)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}$

$3 \leqq k$ のとき　$M(a)=a-1$



グラフより、$M(a)$ は、$a=\dfrac{3}{4}$ のとき、最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。すなわち、$\dfrac{1}{4}$ より小さくなることはない。（証明終）

※結局、最小値を求めることになり、1977年東大理 $\boxed{1}$ 文 $\boxed{1}$ 共通とほぼ同一問題。