1971 年京大理 $\boxed{1}$

（i）

この正方形の左下の頂点の座標を $(a,\ b)$ とすると、この正方形は $a \leqq x \leqq a+1,\ b \leqq y \leqq b+1$ で定義される。

a が整数のとき、 $a+1$ も整数であり、 $a \leqq x \leqq a+1$ を満たす整数 x は、2 つ存在する。

a が整数ではないとき、 a を超える最小の整数は $[a]+1$ で、 $a+1$ を超えない最大の整数は $[a+1]=[a]+1$ であるから、 $a \leqq x \leqq a+1$ を満たす整数 x として、 $x=[a]+1$ の 1 つが存在する。

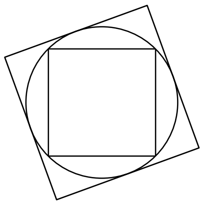
いずれにしても、 $a \leqq x \leqq a+1$ を満たす整数 x が、少なくとも 1 つ存在する。

同様に、 $b \leqq y \leqq b+1$ を満たす整数 y も、少なくとも 1 つ存在する。

したがって、この正方形は、少なくとも 1 つの格子点を含む。（証明終）

（ii）

辺の長さ $\sqrt{2}$ の正方形には、半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の円が内接する。



半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の円には、辺の長さ1の正方形が内接する。

辺の長さ $\sqrt{2}$ の正方形は、どんな位置にあっても、辺の長さが1で、
辺が座標軸に平行な正方形を、内部に含む。

したがって、(i) より、少なくとも 1 つの格子点を含む。（証明終）