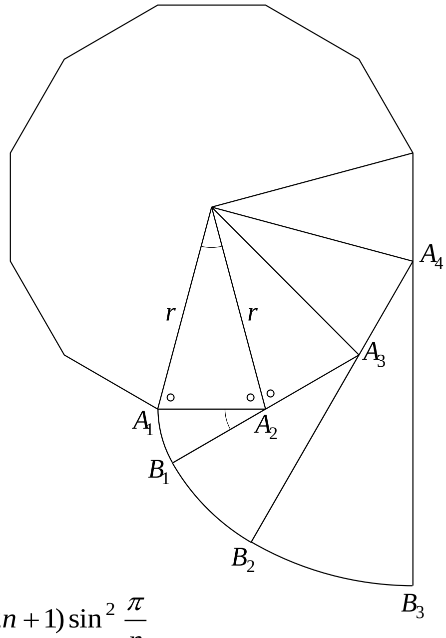
1971 年京大理 $\boxed{5}$

（i）



この正 n 角形の面積は　$n\times\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}$

この正多角形の一辺の長さ l_n は　$2r\sin\frac{\pi}{n}$

題意の手順によって作られる n 個の扇形は、相似である。

k 番目に作られる扇形は、半径が kl_n 、中心角が $\frac{2\pi}{n}$ であるから、

k 番目に作られる扇形の面積は　$\frac{1}{2}(kl_n)^2\frac{2\pi}{n}=4k^2r^2\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}$

これら n 個の扇形の面積の和は

$$4\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)r^2\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot r^2\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}=\frac{2}{3}\pi r^2(n+1)(2n+1)\sin^2\frac{\pi}{n}$$

以上により　$\therefore S_n=\frac{1}{2}r^2n\sin\frac{2\pi}{n}+\frac{2}{3}\pi r^2(n+1)(2n+1)\sin^2\frac{\pi}{n}$　……(答)

（ii）

$$S_n=\pi r^2\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}+\frac{2}{3}\pi^3r^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)^2$$

$n\to\infty$ のとき、$\frac{\pi}{n}\to 0$ であり、$\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\to 1,\ \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\to 1$ であるから　$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\pi r^2+\frac{4}{3}\pi^3r^2$　……(答)