1972 年京大文 $\boxed{5}$

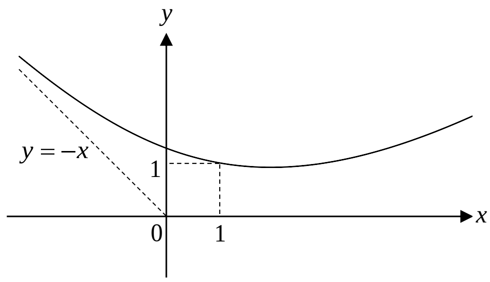
(i)

$(x,\ y)$ を原点中心に 45° 回転した点を、$(x',\ y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2t \\ 2a^t \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} t \\ a^t \end{pmatrix}$$

$x' = \sqrt{2}t,\ y' = \sqrt{2}a^t$ であるから、t を消去すると　$y' = \sqrt{2}a^{\frac{x'}{\sqrt{2}}}$

この曲線は、$y = \sqrt{2}a^{\frac{x}{\sqrt{2}}}$ を原点中心に -45° 回転したものである。



$a > 1$ より、$y = \sqrt{2}a^{\frac{x}{\sqrt{2}}}$ は単調増加であるから、概形は右図の通り。

$y = -x$ は、漸近線である。

(ii)

$p = ca^t + t,\ q = ca^t - t$ とすると

$p - q = 2t$ より　$t = \dfrac{p-q}{2}$　$p + q = 2ca^t$　$c = \dfrac{p+q}{2a^t}$　$t = \dfrac{p-q}{2}$ を代入して　$\therefore c = \dfrac{p+q}{2a^{\frac{p-q}{2}}}$

いかなる点 $(p,\ q)$ に対しても、$c = \dfrac{p+q}{2a^{\frac{p-q}{2}}}$ ととれば、$t = \dfrac{p-q}{2}$ のとき、点 $(p,\ q)$ を通る。(証明終)

(注)

(i) の曲線の極値を求めることは可能だが、そこまで求めなくてもよいだろう。

極値を与える点を求めると、$\left(\dfrac{1 - \log(\log a)}{\log a},\ \dfrac{1 + \log(\log a)}{\log a} \right)$ である。