1972年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{2}$共通

$a=x+y+z$ の両辺を3乗して

$$\begin{aligned}a^3&=(x+y+z)^3=(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)(x+y+z)\\&=x^3+xy^2+z^2x+2x^2y+2xyz+2zx^2+x^2y+y^3+yz^2+2xy^2+2y^2z+2xyz+zx^2+y^2z+z^3+2xyz+2yz^2+2z^2x\\&=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3y^2z+3yz^2+3z^2x+3zx^2+6xyz=x^3+y^3+z^3\end{aligned}$$

$$x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+2xyz=0 \qquad (y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)=0$$

$$(y+z)\left\{x^2+(y+z)x+yz\right\}=0 \qquad \therefore (x+y)(y+z)(z+x)=0$$

したがって、$x+y,\ y+z,\ z+x$ のうち少なくとも1つは0に等しい。

$x+y=0$ であれば $z=a$ 、$y+z=0$ であれば $x=a$ 、$z+x=0$ であれば $y=a$ であるから、

$x,\ y,\ z$ のうち少なくとも1つは a に等しい。（証明終）