1972 年京大理 $\boxed{1}$ 文 $\boxed{1}$ 共通

$n=2$ のとき　$\overrightarrow{A_2}+\overrightarrow{A_1}=\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2}$ は成立。

$n=3$ のとき

$$\overrightarrow{A_1}+(\overrightarrow{A_3}+\overrightarrow{A_2})=\overrightarrow{A_1}+(\overrightarrow{A_2}+\overrightarrow{A_3})$$

$$(\overrightarrow{A_2}+\overrightarrow{A_1})+\overrightarrow{A_3}=(\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2})+\overrightarrow{A_3} \qquad (\overrightarrow{A_2}+\overrightarrow{A_3})+\overrightarrow{A_1}=\overrightarrow{A_1}+(\overrightarrow{A_2}+\overrightarrow{A_3})$$

$$\overrightarrow{A_3}+(\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2})=(\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2})+\overrightarrow{A_3} \qquad (\overrightarrow{A_3}+\overrightarrow{A_2})+\overrightarrow{A_1}=\overrightarrow{A_1}+(\overrightarrow{A_3}+\overrightarrow{A_2})=\overrightarrow{A_1}+(\overrightarrow{A_2}+\overrightarrow{A_3})$$

したがって、$n=3$ のとき成立。

$n=k$ のとき、任意の $\overrightarrow{B_1}, \overrightarrow{B_2}, \cdots, \overrightarrow{B_k}$ について、$\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_k}=\overrightarrow{B_1}+\overrightarrow{B_2}+\cdots+\overrightarrow{B_k}$ が成立すると仮定する。

$\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \cdots, \overrightarrow{A_k}$ に $\overrightarrow{A_{k+1}}$ を追加し、任意に並び替えたものを $\overrightarrow{B_1}, \overrightarrow{B_2}, \cdots, \overrightarrow{B_k}, \overrightarrow{B_{k+1}}$ とする。

$\overrightarrow{B_{k+1}}=\overrightarrow{A_{k+1}}$ のとき

$$\overrightarrow{B_1}+\overrightarrow{B_2}+\cdots+\overrightarrow{B_k}+\overrightarrow{B_{k+1}}=(\overrightarrow{B_1}+\overrightarrow{B_2}+\cdots+\overrightarrow{B_k})+\overrightarrow{A_{k+1}}=(\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_k})+\overrightarrow{A_{k+1}}$$

$\overrightarrow{B_1}=\overrightarrow{A_{k+1}}$ のとき

$$\overrightarrow{B_1}+\overrightarrow{B_2}+\cdots+\overrightarrow{B_k}+\overrightarrow{B_{k+1}}=\overrightarrow{A_{k+1}}+(\overrightarrow{B_2}+\cdots+\overrightarrow{B_k}+\overrightarrow{B_{k+1}})=(\overrightarrow{B_2}+\cdots+\overrightarrow{B_k}+\overrightarrow{B_{k+1}})+\overrightarrow{A_{k+1}}$$

ここで、$\overrightarrow{B_2}+\cdots+\overrightarrow{B_k}+\overrightarrow{B_{k+1}}$ は、$\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \cdots, \overrightarrow{A_k}$ を任意に並べ替えたものの和であるから、仮定より

$$\therefore \overrightarrow{B_1}+\overrightarrow{B_2}+\cdots+\overrightarrow{B_k}+\overrightarrow{B_{k+1}}=(\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_k})+\overrightarrow{A_{k+1}}$$

$\overrightarrow{B_l}=\overrightarrow{A_{k+1}}$ $(2 \leqq l \leqq k)$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1}+\overrightarrow{B_2}+\cdots+\overrightarrow{B_k}+\overrightarrow{B_{k+1}}&=(\overrightarrow{B_1}+\cdots+\overrightarrow{B_{l-1}})+\overrightarrow{A_{k+1}}+(\overrightarrow{B_{l+1}}+\cdots+\overrightarrow{B_{k+1}})\\&=(\overrightarrow{B_1}+\cdots+\overrightarrow{B_{l-1}})+(\overrightarrow{B_{l+1}}+\cdots+\overrightarrow{B_{k+1}})+\overrightarrow{A_{k+1}}\\&=(\overrightarrow{B_1}+\cdots+\overrightarrow{B_{l-1}}+\overrightarrow{B_{l+1}}+\cdots+\overrightarrow{B_{k+1}})+\overrightarrow{A_{k+1}}\end{aligned}$$

ここで、$\overrightarrow{B_1}+\cdots+\overrightarrow{B_{l-1}}+\overrightarrow{B_{l+1}}+\cdots+\overrightarrow{B_{k+1}}$ は、$\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \cdots, \overrightarrow{A_k}$ を任意に並べ替えたものの和であるから、仮定より

$$\therefore \overrightarrow{B_1}+\overrightarrow{B_2}+\cdots+\overrightarrow{B_k}+\overrightarrow{B_{k+1}}=(\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_k})+\overrightarrow{A_{k+1}}$$

したがって、$n=k+1$ でも成立。以上により示された。（証明終）