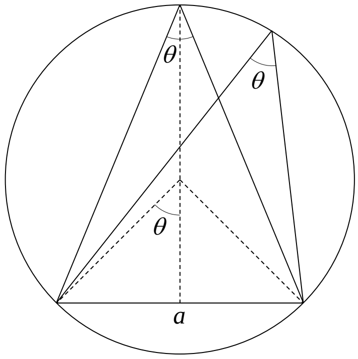
1973年京大文$\boxed{3}$

底辺の長さが a、その辺に対する頂角が θ である三角形の、外接円の半径を R とする。

正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin\theta}=2R$　$R=\dfrac{a}{2\sin\theta}$　円周角の定理により、頂角はこの外接円上を動く。

このような三角形の面積が最大になるのは、高さが最大のときであり、
このとき、頂角は底辺の垂直二等分線上にある。



高さの最大値は　$R(1+\cos\theta)=\dfrac{a(1+\cos\theta)}{2\sin\theta}=\dfrac{2a\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{4\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{a}{2\tan\dfrac{\theta}{2}}$

面積の最大値は　$\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{a}{2\tan\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{a^2}{4\tan\dfrac{\theta}{2}}$　θ が鈍角のときも成立する。

$0° < \theta_2 \leqq \theta_2 < 180°$ より　$0° < \dfrac{\theta_2}{2} \leqq \dfrac{\theta_1}{2} < 90°$　$0 < \tan\dfrac{\theta_2}{2} \leqq \tan\dfrac{\theta_1}{2}$　$0 < \dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta_1}{2}} \leqq \dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta_2}{2}}$

$0 < {a_1}^2 \leqq {a_2}^2$ であるから　$\therefore \dfrac{{a_1}^2}{4\tan\dfrac{\theta_1}{2}} \leqq \dfrac{{a_2}^2}{4\tan\dfrac{\theta_2}{2}}$

いずれの集合も、最大値以下のすべての正の値をとり得るから　$\therefore S(a_1,\,\theta_1) \subseteq S(a_2,\,\theta_2)$　……(答)

これらが一致するのは、$\dfrac{{a_1}^2}{4\tan\dfrac{\theta_1}{2}}=\dfrac{{a_2}^2}{4\tan\dfrac{\theta_2}{2}}$ のときであるから　$\therefore \dfrac{{a_2}^2}{{a_1}^2}=\dfrac{\tan\dfrac{\theta_2}{2}}{\tan\dfrac{\theta_1}{2}}$　……(答)