1973 年京大文 4

（i）

$\vec{a}=(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \vec{b}=(\cos(\theta+120°),\ \sin(\theta+120°)),\ \vec{c}=(\cos(\theta-120°),\ \sin(\theta-120°))$ とおける。

$\vec{x}=(l\cos\alpha,\ l\sin\alpha)$ とすると　$\vec{a}\cdot\vec{x}=l\cos\theta\cos\alpha+l\sin\theta\sin\alpha=l\cos(\theta-\alpha)$

同様に　$\vec{b}\cdot\vec{x}=l\cos(\theta-\alpha+120°)$　$\vec{c}\cdot\vec{x}=l\cos(\theta-\alpha-120°)$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{x}+\vec{b}\cdot\vec{x}+\vec{c}\cdot\vec{x}&=l\left\{\cos(\theta-\alpha)+\cos(\theta-\alpha+120°)+\cos(\theta-\alpha-120°)\right\}\\&=l\left\{\cos(\theta-\alpha)-\frac{1}{2}\cos(\theta-\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta-\alpha)-\frac{1}{2}\cos(\theta-\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta-\alpha)\right\}=0\end{aligned}$$

したがって、任意のベクトル $\vec{x}$ について　$\therefore\vec{a}\cdot\vec{x}+\vec{b}\cdot\vec{x}+\vec{c}\cdot\vec{x}=0$　（証明終）

（ii）

$$\begin{aligned}&(\vec{a}\cdot\vec{x})^2+(\vec{b}\cdot\vec{x})^2+(\vec{c}\cdot\vec{x})^2\\&=l^2\left\{\cos^2(\theta-\alpha)+\left(-\frac{1}{2}\cos(\theta-\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta-\alpha)\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\cos(\theta-\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta-\alpha)\right)^2\right\}\\&=l^2\left\{\cos^2(\theta-\alpha)+\frac{1}{2}\cos^2(\theta-\alpha)+\frac{3}{2}\sin^2(\theta-\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta-\alpha)\sin(\theta-\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta-\alpha)\sin(\theta-\alpha)\right\}\\&=\frac{3}{2}l^2\left\{\cos^2(\theta-\alpha)+\sin^2(\theta-\alpha)\right\}=\frac{3}{2}l^2\end{aligned}$$

$\therefore(\vec{a}\cdot\vec{x})^2+(\vec{b}\cdot\vec{x})^2+(\vec{c}\cdot\vec{x})^2=\frac{3}{2}l^2$　……(答)