1973 年京大理 $\boxed{2}$ 文 $\boxed{2}$ 共通

$f(x)=x^3+px^2+qx+r$ とすると　$f(1)=1+p+q+r=0$　$r=-(1+p+q)$

$$f(x)=x^3+px^2+qx-(1+p+q)=(x-1)\left\{x^2+(1+p)x+(1+p+q)\right\}$$

二次方程式 $x^2+(1+p)x+(1+p+q)=0$ ——① の 2 根の、絶対値が 1 であればよい。

①の 2 根を、$\alpha,\ \beta$ とすると、解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-1-p,\ \alpha\beta=1+p+q$

i）$\alpha=\beta=1$ のとき　$2=-1-p,\ 1=1+p+q$　$\therefore p=-3,\ q=3$　$\therefore r=-1$

ii）$\alpha=\beta=-1$ のとき　$-2=-1-p,\ 1=1+p+q$　$\therefore p=1,\ q=-1$　$\therefore r=-1$

iii）$\alpha=1,\ \beta=-1$ のとき　$0=-1-p,\ -1=1+p+q$　$\therefore p=-1,\ q=-1$　$\therefore r=1$　$\alpha=-1,\ \beta=1$ としても同じ。

iv)①が虚数解を持つとき

2 根は共役であるから、実数 $a,\ b$ を用いて、$\alpha=a+bi,\ \beta=a-bi$ とおける。

このとき　$\alpha\beta=a^2+b^2=1=1+p+q$　$p+q=0$　$\therefore q=-p$　$\therefore r=-1$

①は $x^2+(1+p)x+1=0$ となるから　$D=(1+p)^2-4=p^2+2p-3=(p+3)(p-1)<0$　$\therefore -3<p<1$

$-3<p<1$ のとき、①の解は $x=\dfrac{-(1+p)\pm\sqrt{3-2p-p^2}\,i}{2}$ であり、

$$|\alpha|^2=|\beta|^2=\frac{(1+p)^2+(3-2p-p^2)}{4}=\frac{(1+2p+p^2)+(3-2p-p^2)}{4}=1$$

以上をまとめると　$-3\leqq p\leqq 1$ かつ $q=-p$ かつ $r=-1$　または　$p=q=-1$ かつ $r=1$　……(答)