1974 年京大理 $\boxed{3}$

$f(x)=x^4-6p^2x^2-8q^3x$ とすると　$f'(x)=4x^3-12p^2x-8q^3=4(x^3-3p^2x-2q^3)$

$f'(x)=0$ のとき　$x^3-3p^2x-2q^3=0$　$x^3-3p^2x=2q^3$

$g(x)=x^3-3p^2x$ とすると　$g'(x)=3x^2-3p^2=3(x+p)(x-p)$

$g(x)$ の増減は右の通り。

x	$\cdots$	$-p$	$\cdots$	p	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$y=g(x)$ と $y=2q^3\geqq 0$ の、グラフの共有点を考える。下図参照。

$0\leqq 2q^3<2p^3$、$0\leqq q<p$ のとき、$y=g(x)$ と $y=2q^3\geqq 0$ のグラフは、

3 つの相違なる共有点を持つ。

この x 座標を、小さい方から $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると、

$f(x)$ の増減は右の通り。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$y=f(x)$ のグラフは左右にくぼみを持つ。

すなわち、点 A は左のくぼみに留まる。

$2q^3=2p^3$、$q=p$ のとき、$y=g(x)$ と $y=2q^3\geqq 0$ のグラフは、

2 つの相違なる共有点を持つ。このうち $x=-p$ は重解である。

このとき、$f(x)$ の増減は右の通りで、左側のくぼみがなくなる。

x	$\cdots$	$-p$	$\cdots$	$2p$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$2q^3>2p^3$、$q>p$ のとき、$y=g(x)$ と $y=2q^3\geqq 0$ のグラフは、

1 つの共有点を持つ。この x 座標を α とすると、

$f(x)$ の増減は右の通りで、くぼみは右側にしかない。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

以上により、$0\leqq q<p$ のとき、左側にもくぼみがあり、

$p\leqq q$ のとき、左側のくぼみがないから、

求める値は　$\therefore q=p$　……(答)