1974 年京大理 $\boxed{4}$ 文 $\boxed{4}$ 共通

$F(x)$ は $n+1$ 次式、$g(x)$ は n 次式であるから、$a\neq 0$ として $F(x)=(ax+b)g(x)$ と書ける。

$$\frac{dF(x)}{dx}=ag(x)+(ax+b)g'(x)=g(x) \qquad (1-a)g(x)=(ax+b)g'(x) \qquad \frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{1-a}{a}\cdot\frac{1}{x+\frac{b}{a}}$$

$$\log|g(x)|=\frac{1-a}{a}\log\left|x+\frac{b}{a}\right|+C=\log e^C\left|x+\frac{b}{a}\right|^{\frac{1-a}{a}} \qquad g(x)=\pm e^C\left(x+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1-a}{a}}$$

$\pm e^C$ を C で置き換えて　$g(x)=C\left(x+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1-a}{a}}$

$g(x)$ は n 次式であるから　$\frac{1-a}{a}=n$　$1-a=na$　$\therefore a=\frac{1}{n+1}$

x^n の係数は1であるから　$g(x)=\{x+b(n+1)\}^n$

x^{n-1} の係数は0であるから　$bn(n+1)=0$　$\therefore b=0$

以上により　$\therefore F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1},\ g(x)=x^n$　……(答)