1974年京大理$\boxed{5}$文$\boxed{5}$共通

（イ）

$n^2 \geqq 4m+1$であるから、nが存在するには$\dfrac{a}{\sqrt{m}}+\dfrac{b}{m} \geqq 1$である必要がある。

$a\sqrt{m}+b \geqq m \quad m-a\sqrt{m}-b \leqq 0$ ——①

$a>0,\ b>0$であるから、$t^2-at-b=0$を解くと　$t=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$

$\sqrt{m} \geqq 0$より、①を満たすmの範囲は

$0 \leqq \sqrt{m} \leqq \dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \quad \therefore 0 \leqq m \leqq \dfrac{a^2+2b+a\sqrt{a^2+4b}}{2}$ ——②

②を満たす整数mの個数は有限個であり、各mについて有限個の整数nが定まる。
以上により、題意は示された。（証明終）

（ロ）

$a=8,\ b=9,\ m \geqq 9$のとき　$\dfrac{a}{\sqrt{m}}+\dfrac{b}{m} \leqq \dfrac{8}{3}+\dfrac{9}{9}=\dfrac{11}{3}<4$

また、$(2k)^2=4k^2,\ (2k+1)^2=4(k^2+k)+1$より、$n^2$を4で割った余りは0か1である。
$4m+1 \leqq n^2 < 4m+4$であるから、適するのは$n^2=4m+1$のみ。
以上により、示された。（証明終）

（ハ）
$a=8,\ b=9,\ m \geqq 9$のとき、②より

$9 \leqq m \leqq \dfrac{64+18+8\sqrt{64+36}}{2}=41+4\sqrt{100}=81$

$4m+1$が平方数となるのは、$m=k^2+k=k(k+1)$、すなわち、mが連続した2つの自然数の積になるとき。
mが大きい方から順に調べると

$81=3^4 \quad 80=2^4\times 5$　79は素数　$78=2\times 3\times 13 \quad 77=7\times 11 \quad 76=2^2\times 19 \quad 75=3\times 5^2 \quad 74=2\times 37$
73は素数　$72=8\times 9$

$4\cdot 72+1=289=17^2$であるから、nが最大になる組は　$\therefore (m,\ n)=(72,\ 17)$ ……（答）