1975 年京大文 $\boxed{6}$

(1)

$x_n=\dfrac{1}{2-x_{n-1}}$ より

$$x_1=\frac{1}{2-x_0}=\frac{1}{2-a}\qquad x_2=\frac{1}{2-x_1}=\frac{1}{2-\dfrac{1}{2-a}}=\frac{2-a}{2(2-a)-1}=\frac{2-a}{3-2a}$$

$$x_3=\frac{1}{2-x_2}=\frac{1}{2-\dfrac{2-a}{3-2a}}=\frac{3-2a}{2(3-2a)-(2-a)}=\frac{3-2a}{4-3a}$$

$n≧1$ のとき、$x_n=\dfrac{n-(n-1)a}{n+1-na}$ と予想できるので、数学的帰納法で示す。$n=1$ のとき成立。

$n=k$ のとき、$x_k=\dfrac{k-(k-1)a}{k+1-ka}$ と仮定すると

$$x_{k+1}=\frac{1}{2-x_k}=\frac{1}{2-\dfrac{k-(k-1)a}{k+1-ka}}=\frac{k+1-ka}{2(k+1-ka)-k+(k-1)a}=\frac{k+1-ka}{k+2-(k+1)a}$$

したがって、$n=k+1$ でも成立。

以上により　$\therefore x_n=\dfrac{n-(n-1)a}{n+1-na}$　……(答)

(2)

$$x_n-1+\frac{1}{n}=\frac{n-(n-1)a-(n+1)+na}{n+1-na}+\frac{1}{n}=\frac{a-1}{n+1-na}+\frac{1}{n}=\frac{n(a-1)+n+1-na}{n(n+1-na)}=\frac{1}{n(n+1-na)}$$

$$n^2\left(x_n-1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n^2}{n(n+1-na)}=\frac{1}{1-a+\dfrac{1}{n}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}n^2\left(x_n-1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{1-a}\quad\cdots\cdots(答)$$