1975年京大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

（i）

$\frac{1}{2}(x+1)-\sqrt{x}=\frac{1}{2}(x-2\sqrt{x}+1)=\frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)^2\geqq 0$ であるから　$\therefore \sqrt{x}\leqq\frac{1}{2}(x+1)$　（証明終）

（ii）

（i）より　$\int_0^k \sqrt{x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx \leqq \frac{1}{2}\int_0^k (x+1)\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx$

$y=1-\frac{x}{k}$ とおくと　$dy=-\frac{dx}{k}$　$\begin{array}{c|c} x & 0\to k \\ \hline y & 1\to 0 \end{array}$　$x=k(1-y)$ であるから

$$\frac{1}{2}\int_0^k (x+1)\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx=\frac{1}{2}\int_1^0 (k+1-ky)y^k\cdot(-kdy)=\frac{k}{2}\int_0^1\left\{(k+1)y^k-ky^{k+1}\right\}dy$$

$$=\frac{k}{2}\left[y^{k+1}-\frac{k}{k+2}y^{k+2}\right]_0^1=\frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{k+2}\right)=\frac{k}{k+2}<1$$

したがって、$\int_0^k \sqrt{x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx<1$ が示された。（証明終）