1976年京大文$\boxed{4}$

（i）

$(x,\ y)=(t,\ at)$ とすると　$(2x-y,\ x-2y)=((2-a)t,\ (1-2a)t)$

$a=2$ のとき、$2x-y=0$ であり、$(2x-y,\ x-2y)$ は直線 $x=0$ 上を動く。

$a\neq 2$ のとき、$x-2y=\dfrac{1-2a}{2-a}(2x-y)$ であり、、$(2x-y,\ x-2y)$ は直線 $y=\dfrac{1-2a}{2-a}x$ 上を動く。

いずれにしても、原点を通る1つの直線上を動く。（証明終）

（ii）

$y=ax$ と l が一致するとき、$a\neq 2$ であり、$a=\dfrac{1-2a}{2-a}$ であるから

$$a(2-a)=1-2a \quad a^2-4a+1=0 \quad \therefore a=2\pm\sqrt{3}$$

$y=ax$ と l が一致するような a は、2つある。（証明終）

$y=a_1x,\ y=a_2x$ が x 軸となす角を、それぞれ $\theta_1,\ \theta_2$ とすると、$a_1=\tan\theta_1,\ a_2=\tan\theta_2$ である。

$a_1=2-\sqrt{3}=\tan\theta_1,\ a_2=2+\sqrt{3}=\tan\theta_2$ とすると　$\tan(\theta_2-\theta_1)=\dfrac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}=\dfrac{2\sqrt{3}}{1+1}=\sqrt{3}$

$y=a_1x$ と $y=a_2x$ の間の角は　$\therefore \theta_2-\theta_1=60^\circ$ ……（答）

※当時は範囲外だったかもしれないが、行列$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$が表す一次変換による、不動直線に関する出題である。